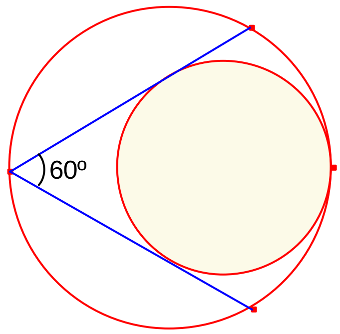
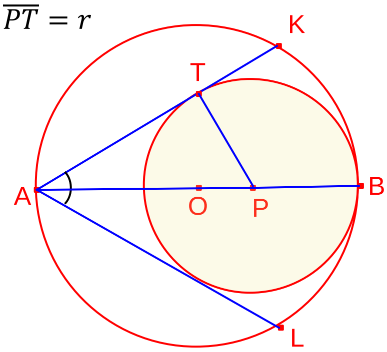
3041.- Dues cordes d'una circumferència formen $60°$ i són tangents a una circumferència.
La circumferència és tangent interior a la primera circumferència.
Calculeu la proporció de les àrees dels dos cercles.

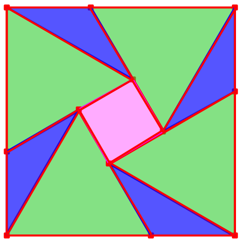


Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Sigen les cordes $\overline{AK}, \overline{AL}, \angle KAL = 60°$
Siga la circumferència tangent interior de centre P i radi $\overline{PB} = \overline{PT} = r$
$\angle TAP = 30°, \angle ATP = 90°$
$\overline{AP} = 2R - r$
$\overline{AP} = 2 \cdot \overline{PT}$
$2R - r = 2r$
$R = \frac{3}{2}r$
La proporció de les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{r}{\frac{3}{2}r}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



3042.- Dos quadrats i quatre triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció entre la zona blava i la verda.



Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$.
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = 1$
Siga K el punt mig del costat $\overline{DE}$ del triangle equilàter.
Siga J la projecció de F sobre el costat $\overline{CD}$

$\overline{KF} = \overline{DJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{DK} = \frac{1}{2}$

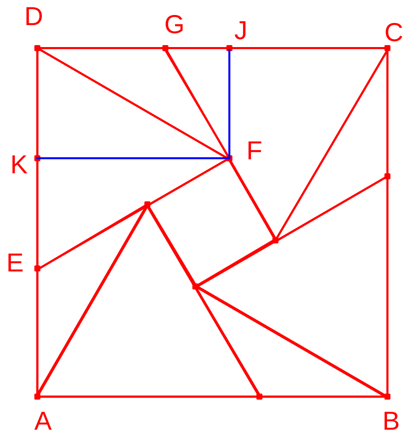
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DKF}, \overset{\Delta}{GJF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

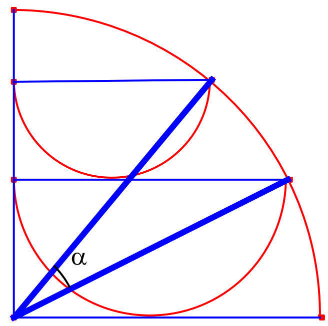
$\overline{DG} = \overline{DJ} - \overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La proporció entre l'àrea blava i l'àrea verda és:

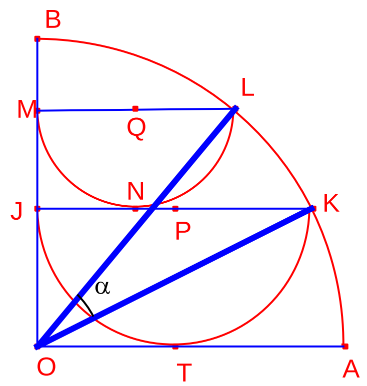
$$\frac{S_{DGF}}{S_{DEF}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2} = \frac{1}{3}$$



3043.- Donades dues semicircumferències en l'interior d'un quadrant.
Calculeu $\sin\alpha$

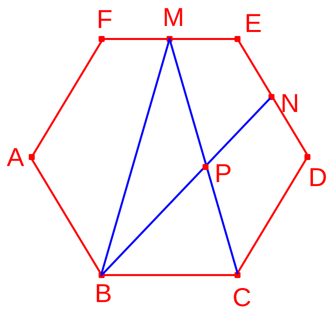


Solució
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PJ} = 1$
$\overline{OK} = \sqrt{5}$ radi del quadrant.
Siga $\beta = \angle KOA = \angle OKJ$
$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

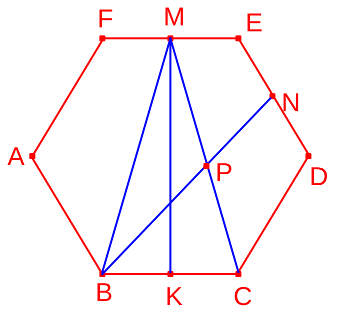


Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QL} = r$
$\overline{OM} = r + 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OML}$:
$5 = 4r^2 + (1 + r)^2$
$5r^2 + 2r - 4 = 0$
Resolent l'equació:
$r = \frac{-1 + \sqrt{21}}{5}$
Siga $\gamma = \angle LOA$
$\sin\gamma = \frac{4 + \sqrt{21}}{5\sqrt{5}}, \cos\gamma = \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{5\sqrt{5}}$
$\sin\alpha = \sin(\gamma - \beta) = \frac{4 + \sqrt{21}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{-2 + 2\sqrt{21}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}$

3044.- Siguen M, N els punts migs dels costat $\overline{EF}, \overline{DE}$, respectivament de l'hexàgon regular $ABCDEF$.
Siga P la intersecció dels segments $\overline{BN}, \overline{CM}$.
Siga $\overline{BM} = 13$
Calculeu $\overline{BP} - \overline{MP}$



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{BC} = c$
Siga K el punt mig del costat $\overline{BC}$
$\overline{MK} = c\sqrt{3}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKM}$:
$13^2 = \frac{1}{4}c^2 + 3c^2$
Aleshores:
$c = 2\sqrt{13}$

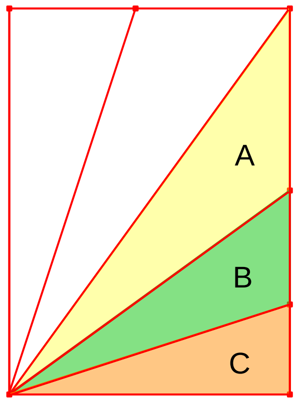
Siga $\alpha = \angle MBK$
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$
$\angle NBC = \angle MCD$
Aleshores, $\angle BPC = 60°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\frac{\overline{BP}}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{13}}{\sin 60°} = \frac{\overline{PC}}{\sin(60° + \alpha)}$
$\overline{BP} = 8, \overline{PC} = 6$
$\overline{MP} = 13 - 6 = 7$
$\overline{BP} - \overline{MP} = 8 - 7 = 1$

3045.- El rectangle de la figura s'ha dividit en 5 triangles que tenen un vèrtex comú de 18°

Calculeu la proporció d'àrees:

$\frac{A}{C}, \frac{A}{B}$

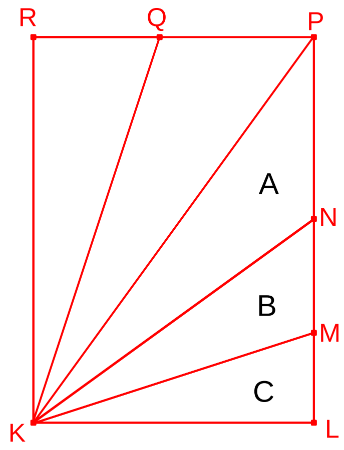


Solució:

$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$

Siga el rectangle $KLPR$ tal que $\overline{KL} = 1$.

Siguen $\angle LKM = \angle MKN = \angle NKP = 18°$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{KM} = \frac{1}{\cos 18°}$

$C = S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos 18°} \cdot \sin 18° = \frac{1}{2}\tan 18°$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLN}$:

$\overline{KN} = \frac{1}{\cos 36°} = \frac{2}{\Phi}$

$B = S_{KMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 18°} \cdot \frac{2}{\Phi} \cdot \sin 18° = \frac{1}{\Phi}\tan 18°$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLP}$:

$\overline{KP} = \frac{1}{\cos 54°} = \frac{1}{\sin 36°}$

$A = S_{KNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 36°} \cdot \frac{1}{\cos 36°} \cdot \sin 18° = \frac{1}{\sin 72°} \cdot \sin 18° = \tan 18°$

$\frac{A}{C} = \frac{\tan 18°}{\frac{1}{2}\tan 18°} = 2$

$\frac{A}{B} = \frac{\tan 18°}{\frac{1}{\Phi}\tan 18°} = \Phi$

Aleshores:

$A : B : C = 2\Phi : 2 : \Phi = 2 : 2\Phi - 2 : 1$

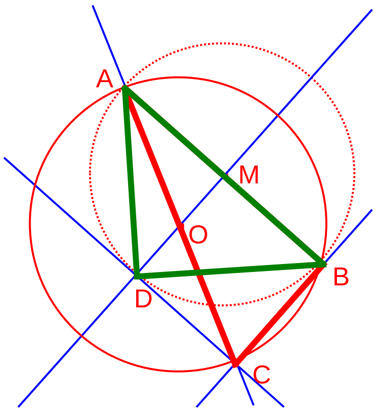
3046.- Siga $\overline{AB}$ una corda d'un circumferència de radi 1.

Siga C un punt de la circumferència tal que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $B = 90°$.

Siga D un punt tal que el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$ amb hipotenusa $\overline{AB}$ que té la mateixa àrea que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució.



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$.
La corda $\overline{AC}$ és diàmetre de la circumferència.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$
El punt D és la intersecció a la circumferència de centre M i diàmetre $\overline{AB}$ i la mediatriu del segment $\overline{AB}$.

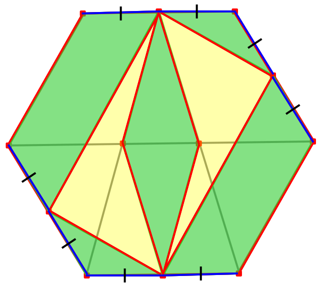
Com que els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ABD}$ tenen la mateixa àrea.
$\overline{DM} = \overline{BC}$

Siga $\overline{MA} = r$
$\overline{DM} = \overline{BC} = r$

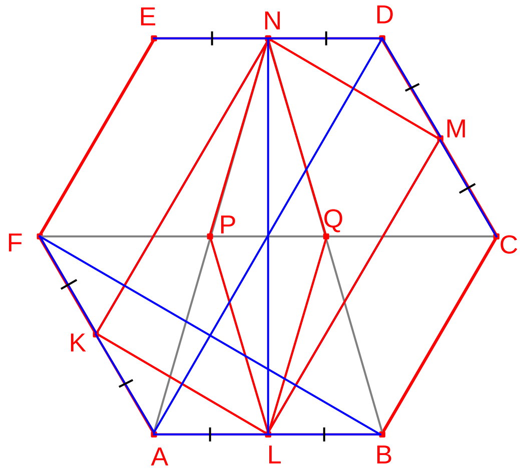
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$2^2 = r^2 + 4r^2$
$r^2 = \dfrac{4}{5}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} r \cdot 2r = r^2 = \dfrac{4}{5}$

3047.- Quatre costats d'un hexàgon regular s'han dividit en parts iguals.
Calculeu les proporcions de les àrees:
$\frac{groga}{verda}, \frac{verda}{total}$



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen K, L, M, N els punts migs dels costats $\overline{AF}, \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{DE}$, respectivament.



$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}$

$\overline{LN} = \overline{BF} = \sqrt{3}$

$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{KN} = \frac{\overline{EF} + \overline{AD}}{2} = \frac{3}{2}$

$$S_{groga} = S_{KLMN} - S_{LQNP} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

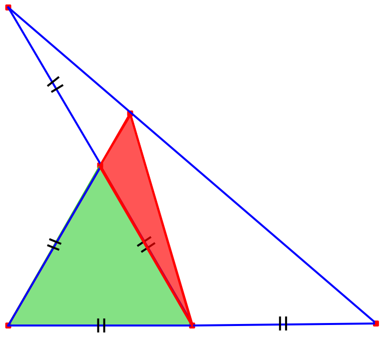
$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{verda} = S_{ABCDEF} - S_{groga} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{verda}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}$$

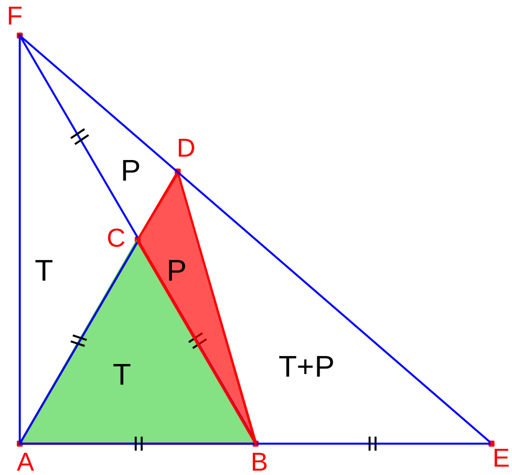
3048.- En la figura determineu la proporció entre l'àrea verda i la roja.



Solució:

Siga T l'àrea del triangle equilàter verd $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga P l'àrea del triangle roig $\overset{\Delta}{BCD}$.



Dos triangles que tenen la mateixa base i altura tenen la mateixa àrea.

$S_{ACF} = T$

$S_{CDF} = P$

$S_{BED} = S_{ABD} = T + P$

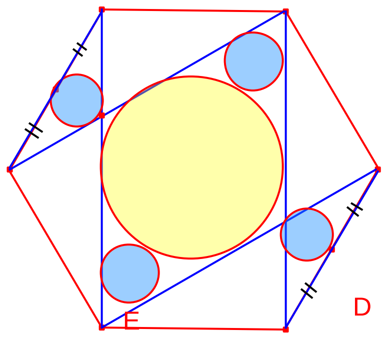
$S_{ABF} = S_{BEF}$

$2T = 3P + T$

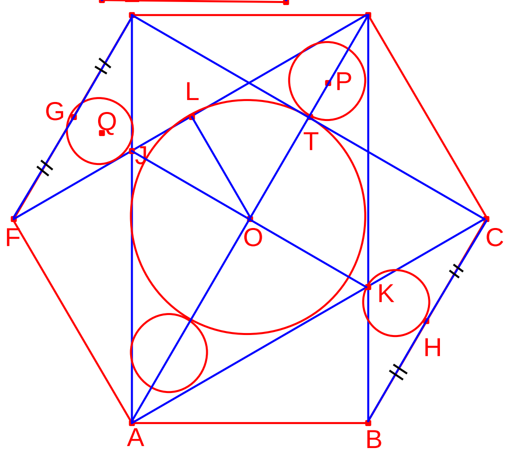
Aleshores:

$\dfrac{T}{P} = 3$

3049.- En l'hexàgon regular s'han dibuixat cinc circumferències.
Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels cercles blaus i l'àrea del cercle groc.



Solució:
Els cercles blaus són iguals dos a dos.
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siguen G, H els punts migs dels costat $\overline{BC}, \overline{EF}$, respectivament.
Siga J la intersecció de les diagonal $\overline{AE}, \overline{DF}$
Siga K la intersecció de les diagonals $\overline{AC}, \overline{BD}$

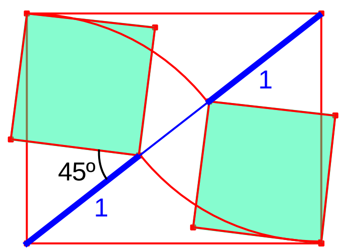


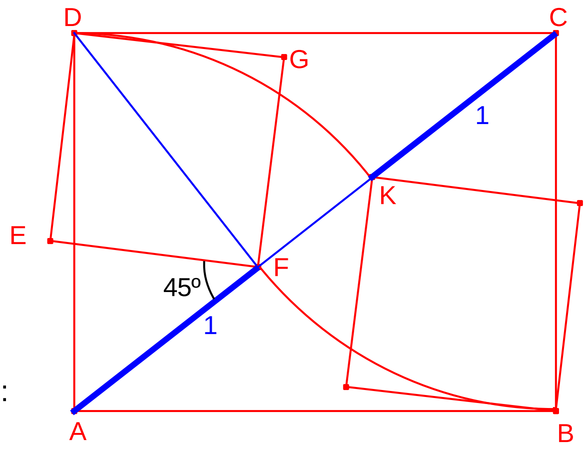
$\overline{GH} = \overline{AC} = c\sqrt{3}$
$\overline{OD} = c$
$\overline{JK} = \overline{KD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$
Siga la circumferència groga de centre O i radi $\overline{OL} = R$
$R = \dfrac{3}{2}\overline{OJ} = \dfrac{1}{2}c$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QG} = \overline{QJ} = r$
$4r = \overline{GH} - \overline{JK} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}c$
$r = \dfrac{\sqrt{3}}{12}c$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = s$
$s = \dfrac{1}{3}\overline{TD} = \dfrac{1}{3}\overline{OD} - R = \dfrac{1}{6}c$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{blava}}{S_{groga}} = \frac{2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot \pi s^2}{\pi R^2} = \frac{2 \cdot \frac{3}{144} + 2 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{18}$$

3050.- Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats iguals ombrejats de la figura.





Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = c$
$\overline{DF} = c\sqrt{2}$
Siga $\overline{AF} = \overline{CK} = 1$
Siga $\overline{FK} = a$

$\overline{AD} = 1 + a$
$\angle AFD = 90°$

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$\overline{DF}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{CF}$
$2c^2 = 1 + a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFD}$:
$(1 + a)^2 = 1 + 2c^2$

$(1 + a)^2 = 1 + 1 + a$
$a^2 + a - 1 = 0$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \Phi - 1$$
La suma de les àrees és:
$S = 2c^2 = 1 + a = \Phi$