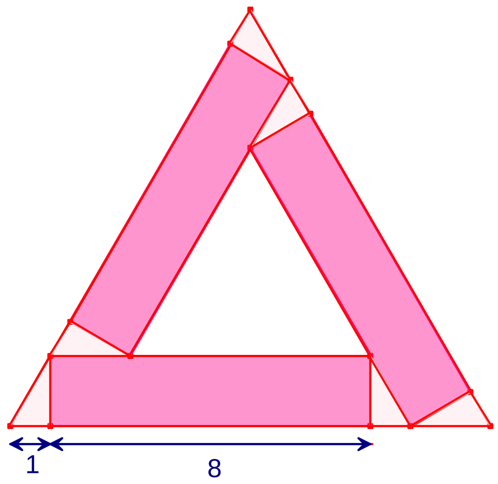
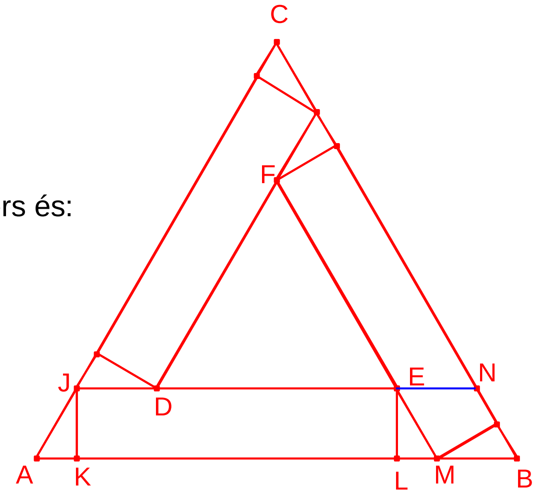
3051.- Els tres rectangles en l'interior del triangle equilàter de la figura, són iguals i el costat major mesura 8.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle equilàter blanc i l'àrea del triangle exterior.



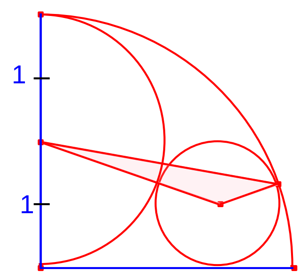
Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$.
Siga el rectangle $JKLE, \overline{KL} = \overline{JE} = 8$
Siga $\overline{AK} = 1$.
$\overline{AJ} = \overline{JD} = 2$
$\overline{LM} = 1, \overline{MB} = 2$
$\overline{AB} = 12, \overline{DE} = \overline{JE} - \overline{JD} = 8 - 2 = 6$
La proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters és:

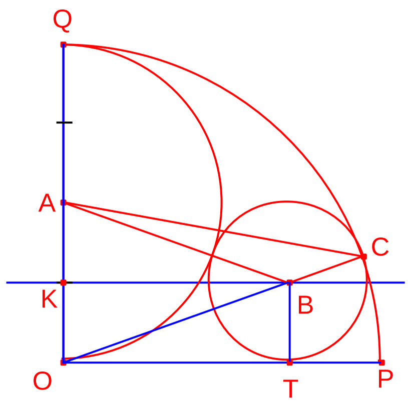
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{6}{12}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



3052.- Donats el quadrant el semicercle i e cercle, calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OQ} = 2$
Siga el semicercle de centre A i diàmetre $\overline{OQ} = 2$
Siga el cercle de centre B i radi $\overline{BC} = \overline{BT} = r$
Siga K la projecció de B sobre $\overline{OQ}$
$\overline{OK} = r$
Siguen els angles $\angle KBA = \alpha, \angle BOT = \beta$
Siga $\overline{BT} = x$
$\overline{AB} = 1 + r, \overline{AK} = 1 - r$

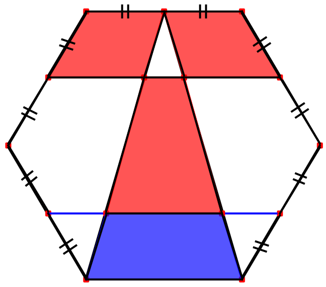


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKB}$:
$x^2 = (1+r)^2 - (1-r)^2 = 4r$

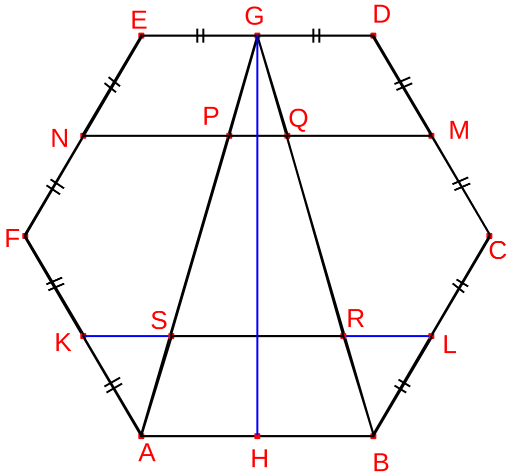
$\overline{OB} = 2 - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTB}$:
$x^2 = (2-r)^2 - r^2 = 4 - 4r$
Igualant ambdues expressions:
$4r = 4 - 4r$
$r = \dfrac{1}{2}$
Aleshores:
$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}, \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$\sin\beta = \dfrac{1}{5}, \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
$\angle ABC = 180° - (\alpha + \beta)$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin(\alpha + \beta)$
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{20}$

3053.- Amb els punts migs dels costats de l'hexàgon regular s'ha format quatre quadrilàters ombrejats. Calculeu la proporció entre l'àrea blava i l'àrea roja.



Solució 1:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen K, L, M, N, H els punts migs dels costats $\overline{AF}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{AB}$, respectivament.

$\overline{GH} = c\sqrt{3}$

$\overline{MN} = \frac{\overline{CF} + \overline{DE}}{2} = \frac{3}{2}c$

$\overline{PQ} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4}c$

$\overline{RS} = \frac{3}{4}\overline{AB} = \frac{3}{4}c$

$\overline{NP} = \frac{\overline{MN} - \overline{PQ}}{2} = \frac{5}{8}c$

L'àrea blava és:

$$S_{ABRS} = \frac{c + \frac{3}{4}c}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c = \frac{7\sqrt{3}}{32}c^2$$

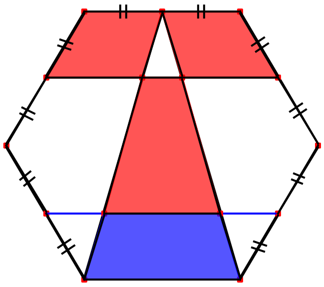
L'àrea roja és:

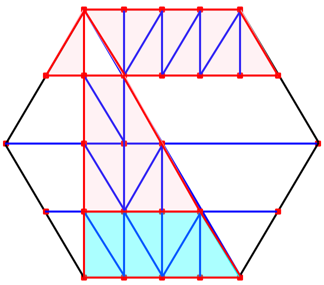
$$S_{roja} = 2 \cdot S_{NPGE} + S_{PQRS} = 2 \cdot \frac{\frac{5}{8}c + \frac{1}{2}c}{2}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{3}{4}c + \frac{1}{4}c}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{17\sqrt{3}}{32}c^2$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABRS}}{S_{roja}} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{32}}{\frac{17\sqrt{3}}{32}} = \frac{7}{17}$$

Solució 2:

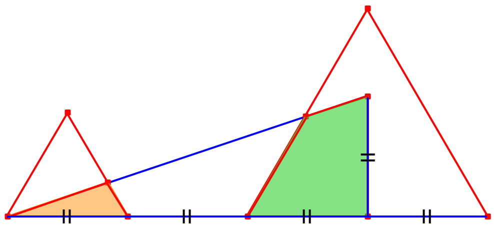




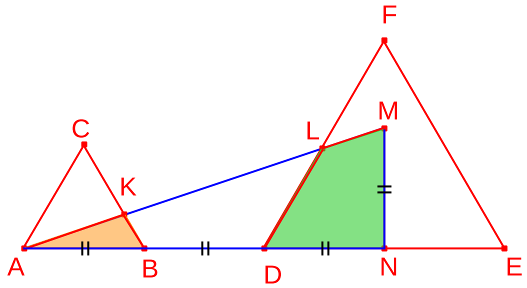
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{blava}}{S_{roja}} = \frac{7}{17}$$

3054.- En la figura hi ha dos triangles equilàters i cinc segments iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = 2$

Siguen $\angle KAB = \alpha, \overline{BK} = x, \overline{DL} = y$

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABK}$:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + 60°)}$$

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+60°)} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{1+3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{13}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}x \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}-1}{13}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9-\sqrt{3}}{52}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADL}$:

$$\frac{y}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin(\alpha+120°)}$$

$$y = \frac{2\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+120°)} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3\sqrt{10}}{10}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{-1+3\sqrt{3}} = 4\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{13}$$

L'àrea del quadrilàter $DNML$ és:

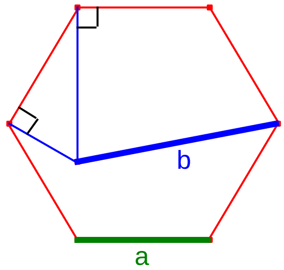
$$S_{DNML} = S_{ANM} - S_{ADL} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot y\cdot\sin 60°\right) = \frac{3}{2} - 4\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{13}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} - 2\cdot\frac{9+\sqrt{3}}{13} = \frac{21-2\sqrt{3}}{26}$$

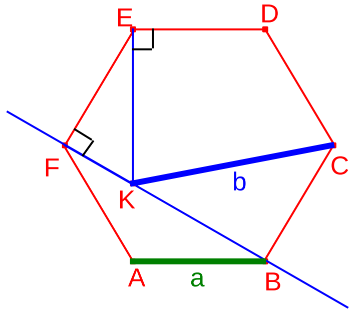
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{DNML}}{S_{ABK}} = \frac{\frac{21-2\sqrt{3}}{26}}{\frac{9-\sqrt{3}}{52}} = \frac{61+\sqrt{3}}{13} \approx 4.8255$$

3055.- Donat l'hexàgon regular de la figura, calculeu la proporció:
$\frac{b}{a}$



Solució:
Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = a$
La recta FK passa pel vèrtex B.



$\overline{BF} = a\sqrt{3}$

$\overline{FK} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

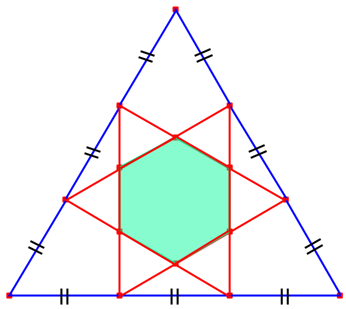
$\overline{BK} = \overline{BF} - \overline{FK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBC}$:

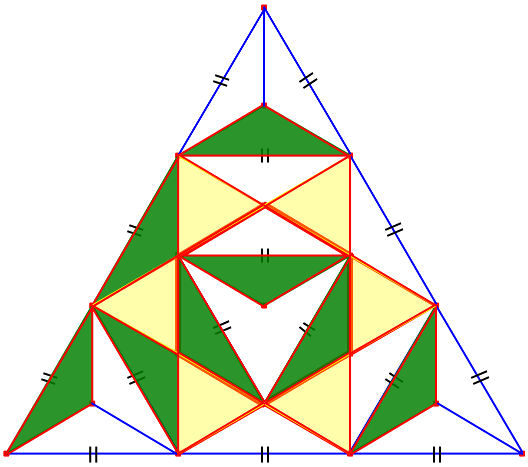
$b^2 = a^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{7}{3}a^2$

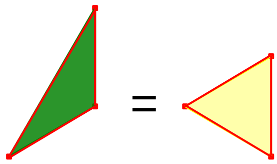
$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

3056.- Els costats d'un triangle equilàter s'han dividit en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon regular i l'àrea del triangle.



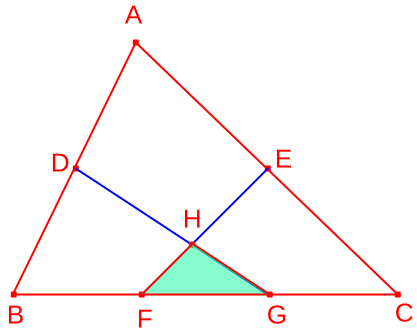
Solució:



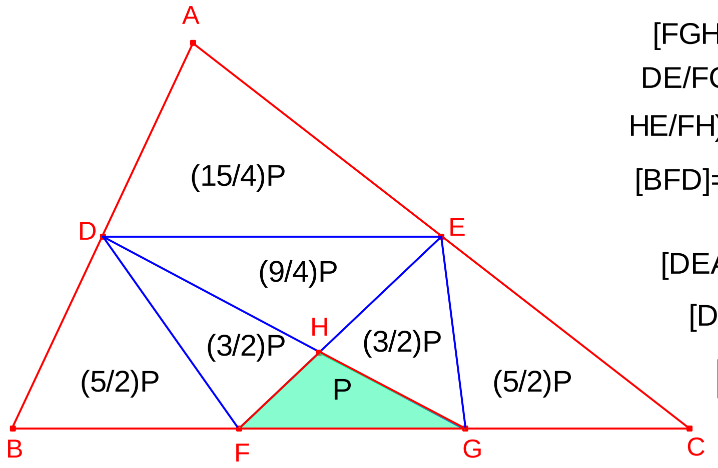


$$\frac{S_{hexàgon}}{S_{total}} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

3057.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura, D i E són els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{AC}$, respectivament.
Els punts F, G són tals que $\overline{BF} = \overline{FG} = \overline{GC}$
Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FGH}$ és 100, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:



[FGH]=P=100

DE/FG=3/2, [DEH]=(9/4)P

HE/FH)3/2, [FHD]=[HDF]=(3/2)P

[BFD]=[FGD]=[GCE]= (5/2)P

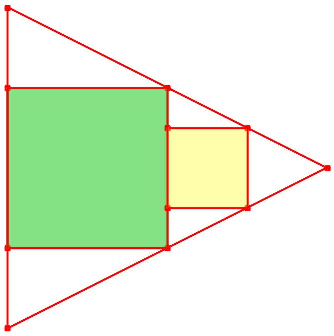
[DEA]/[BCED]=1/3

[DEA]=(15/4)P

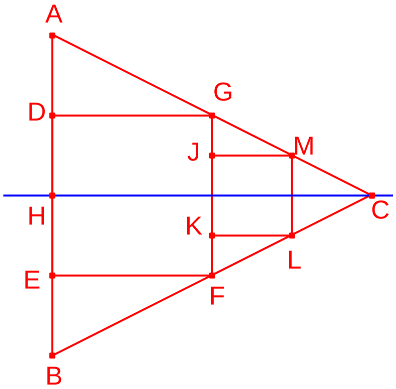
[ABC]=15P=1500

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 1500

3058.- El costat del quadrat verd és el doble del quadrat groc.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de triangle exterior.



Solució:
Siga el quadrat $DEFG$ de costat $\overline{DE} = 2c$
Siga el quadrat $JKLM$ de costat $\overline{JK} = c$

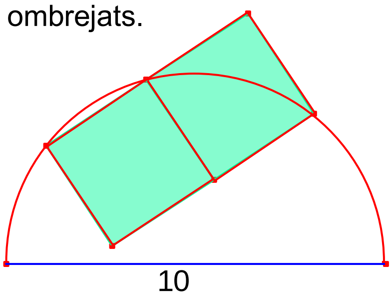


$$\overline{GJ} = \overline{KF} = \frac{1}{2}c$$

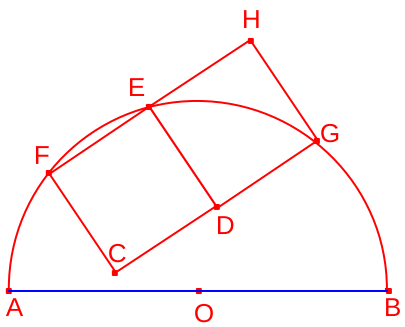
Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{F}L, E\overset{\Delta}{B}F$ són semblants i de raó 1:2
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BE} = c$
$\overline{AB} = 4c$
Siga H el punt mig del costat $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $H\overset{\Delta}{B}C, E\overset{\Delta}{B}F$ són semblants i de raó 1:2
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{HC} = 4c$
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{4c^2 + c^2}{\frac{1}{2} \cdot 4c \cdot 4c} = \frac{5}{8}$$

3059.- En la figura, calculeu l'àrea total dels dos quadrats ombrejats.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 10$
Siguen els quadrats $CDEF, DGHE$ de costat $\overline{CD} = c$

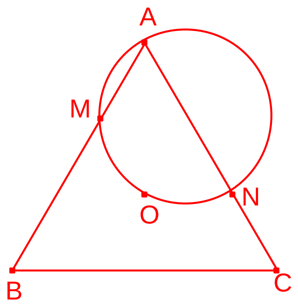


$\overline{EG} = c\sqrt{2}, \overline{FG} = c\sqrt{5}$
Siga $\angle FOE = 2\beta, \angle EOE = 2\gamma$
Siga $\angle FOG = 2(\beta + \gamma)$
$\sin\beta = \frac{c}{10}, \sin\gamma = \frac{c\sqrt{2}}{10}$

$\sin(\beta+\gamma) = \frac{c\sqrt{5}}{10} = \frac{c}{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{2c^2}{100}} + \frac{c\sqrt{2}}{10} \cdot \sqrt{1 - \frac{2c^2}{100}}$
Simplificant:
$10\sqrt{5} = \sqrt{100 - 2c^2} + \sqrt{200 - 2c^2}$
Resolent l'equació:
$c^2 = 10$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 2c^2 = 20$

Nota: podem observar que:
$\sin(\beta+\gamma) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle FOG = 2(\alpha+\beta) = 90°$

3060.- Donat el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de baricentre O, dibuixem una circumferència que passa pels punts O, A i intersecta els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ en els punts, M, N, respectivament.
Proveu que $\overline{AM} = \overline{CN}$.



Solució:

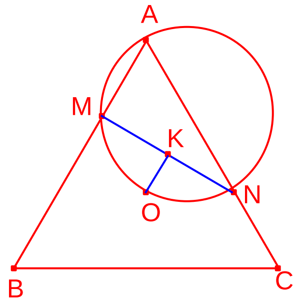
Siga triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{BC} = c$

$\overline{AO} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} c$

Siga $\overline{AM} = a$

$\angle MAO = \angle OAN = 30°$

Aleshores, $\overline{MO} = \overline{NO} = b$



Per ser $AMON$ inscriptible.

$\angle MON = 180° - \angle MAN = 180° - 60° = 120°$

Siga K el punt mig del segment $\overline{MN}$

$\overline{MK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{OM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} b$

$\overline{MN} = b\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible $AMON$:

$\overline{ON} \cdot \overline{AM} + \overline{OM} \cdot \overline{AN} = \overline{AO} \cdot \overline{MN}$

$b \cdot a + b \cdot \overline{AN} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} c \cdot b\sqrt{3}$

Simplificant:

$a + \overline{AN} = c$

$\overline{AN} = c - a$

$\overline{CN} = c - \overline{AN} = c - (c - a) = a = \overline{AM}$