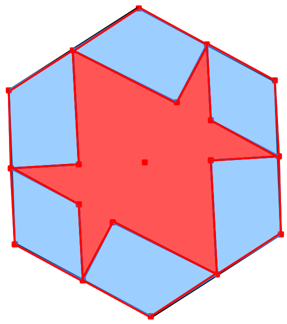
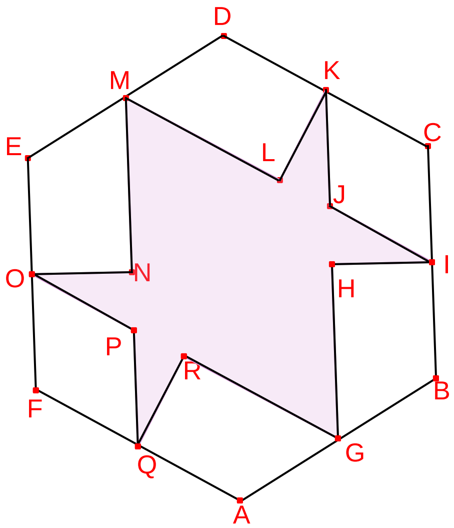
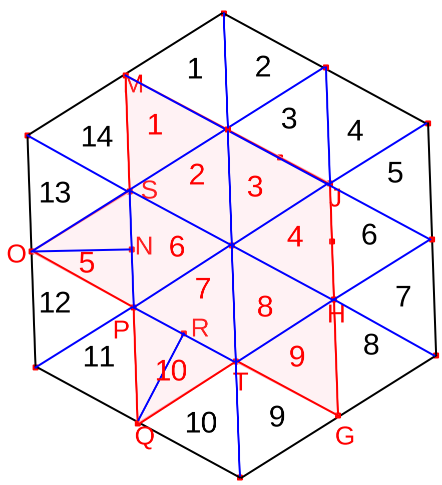
3061.- En l'hexàgon regular de la figura, determineu la proporció entre l'àrea roja i l'àrea blava.



Solució:





Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JKL}, \overset{\Delta}{OMS}$ són iguals.

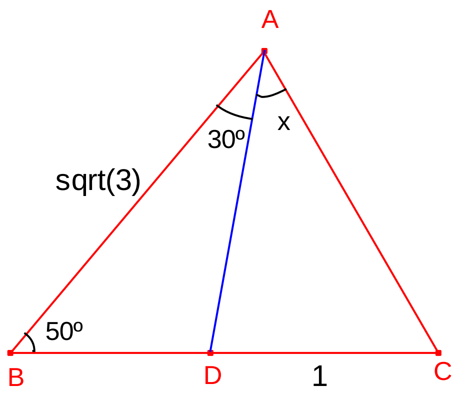
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HIJ}, \overset{\Delta}{RQT}$ són iguals.

Aleshores els polígons GHIJKLMNOPQR, GJMSOPQT són iguals.

Aleshores:

$$\frac{S_{roja}}{S_{blavva}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

3062.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $B = 50°, \overline{AB} = \sqrt{3}$
Siga D un unt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} = 1, \angle BAD = 30°$
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle CAD$



Solució:
Siga $\overline{AD} = d$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\frac{d}{\sin 50°} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 100°}$$
$$d = \frac{\sin 50°}{\sin 100°}\sqrt{3} = \frac{1}{2\cos 50°}\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\frac{d}{\sin(100° - x)} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2\cos 50°}\sqrt{3}\frac{1}{\sin(100° - x)} = \frac{1}{\sin x}$$

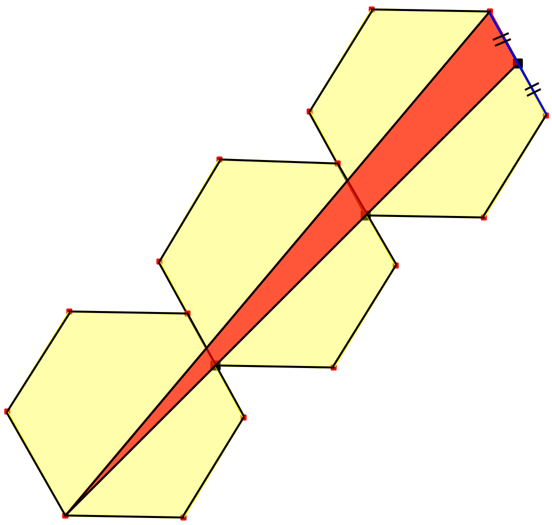
$$\frac{\sqrt{3}}{2\cos 50° \cdot \sin(100° - x)} = \frac{1}{\sin x}$$

$$2\cos 50° \cdot \sin(100° - x) = \sqrt{3}\sin x$$
$$\sin(50° - x) + \sin(150° - x) = \sqrt{3}\sin x$$
$$\sin(50° - x) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sqrt{3}\sin x$$

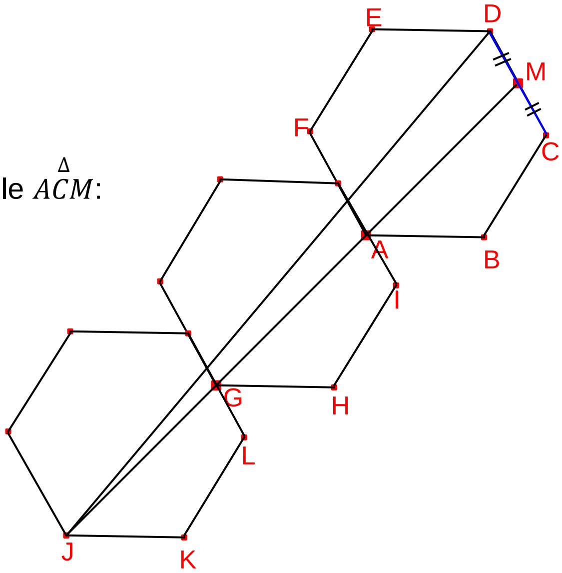
$$\sin(50° - x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\sin(50° - x) = \sin(x - 30°)$$
$$50° - x = x - 30°$$
Resolent l'equació:
$$x = 40°$$

3063.- Els tres hexàgons regulars de la figura són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle roig i l'àrea ombrejada de groc.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$
Els quadrilàters $ABCM, GHIA, JKLG$ són iguals.



$\overline{AC} = c\sqrt{3}, \angle ACM = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACM}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{13}}{2}c$$

Siga $\angle CAM = \beta$

$$\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$\angle AMD = 90° + \beta$$

L'àrea del triangle roig $\overset{\Delta}{JMD}$ és:

$$S_{roig} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot 3\frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \cos\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2$$

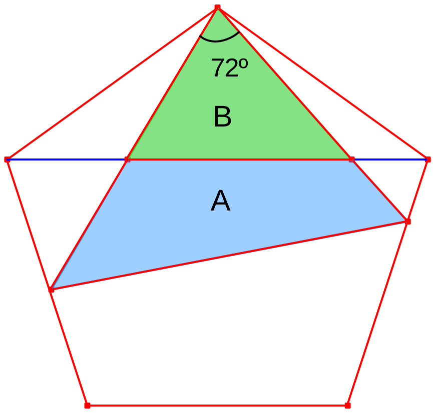
L'àrea ombrejada de groc és igual a l'àrea dels tres hexàgons menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{JMD}$:

$$S_{groc} = 3 \cdot 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{15\sqrt{3}}{4}c^2$$

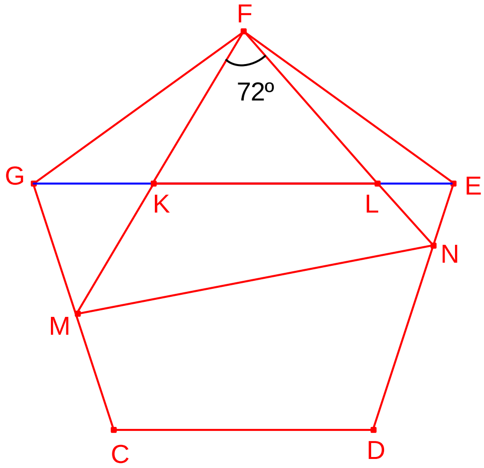
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{roig}}{S_{groc}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{15\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{1}{5}$$

3064.- En un pentàgon regular s'ha dibuixat una diagonal i un triangle B d'angle $72°$ i un quadrilàter A.
Calculeu la proporció entre les àrees :
$\frac{A}{B}$



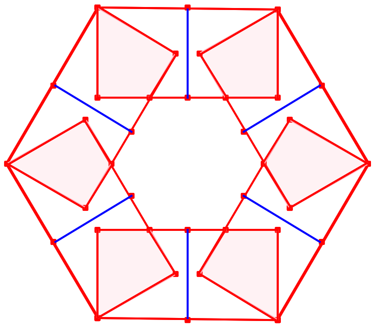
Solució:
Siga el pentàgon regular $CDEFG$ de costat $\overline{CD} = 1$
Siguen $\overline{FK} = a, \overline{FL} = b, \overline{KM} = c, \overline{LN} = d$
Siga $\angle GFK = x$
$\angle FGK = \angle FEL = 36°$
$\angle FKL = x + 36°, \angle EFL = 36° - x$



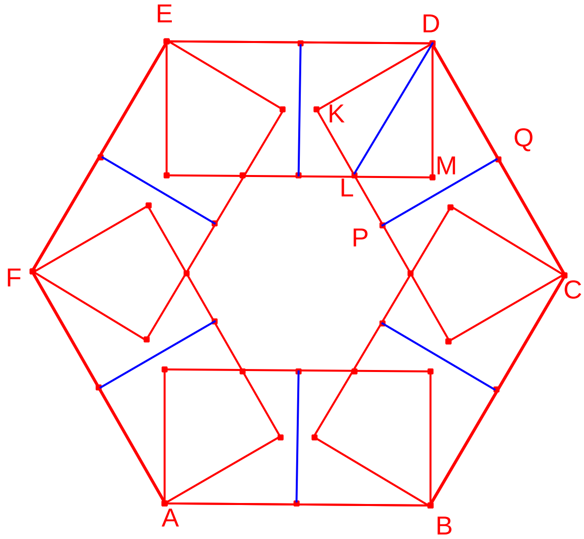
Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{GKF}, \overset{\Delta}{FLE}$:
$$\frac{a}{\sin 36°} = \frac{1}{\sin(36° + x)}, \frac{b}{\sin 36°} = \frac{1}{\sin 72° - x}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLF}$ és:
$$B = \frac{1}{2}ab \cdot \sin 72° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 36°}{\sin(36° + x)} \cdot \frac{\sin 36°}{\sin 72° - x} \cdot \sin 72°$$

Aplicant el teorema dels sinus als triangles $\overset{\Delta}{GMF}, \overset{\Delta}{FNE}$:
$$\frac{a + c}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin(108° + x)}, \frac{b + d}{\sin 108°} = \frac{1}{\sin 144° - x}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNF}$ és:
$$A + B = \frac{1}{2}(a + c)(b + c) \cdot \sin 72° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 108°}{\sin(108° + x)} \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 144° - x} \sin 72°$$
$$\frac{A + B}{B} = \frac{\frac{\sin^2 108°}{\sin(108° + x) \cdot \sin 144° - x}}{\frac{\sin^2 36°}{\sin(36° + x) \cdot \sin 72° - x}} = 4 \cdot \cos^2 36° = 4\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 = \Phi^2 = 1 + \Phi$$
$$\frac{A}{B} + 1 = 1 + \Phi$$
$$\frac{A}{B} = \Phi$$

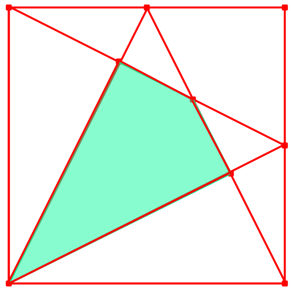
3065.- Dotze quadrats iguals s'han dibuixat sobre els costats d'un hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $DKPQ$ de costat $\overline{DK} = \frac{1}{2}c$
$\angle KDE = 30°$
Aleshores:
$\angle KDL = 30°$
$\overline{KL} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$
L'àrea del quadrilàter $DKLM$ és:
$S_{DKLM} = \overline{DK} \cdot \overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{12}c^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \frac{6 \cdot S_{DKLM}}{S_{ABCDEF}} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{1}{3}$$



3066.- En un quadrat s'han dibuixat dos triangles que tenen un costat el costat del quadrat i el tercer vèrtex en el punt mig del costat oposat.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos triangles i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga $\alpha = \angle DAB = \angle CDE$
Aleshores, $\angle AMD = 90°$

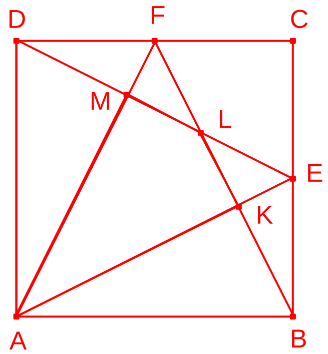
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores $\overset{\Delta}{ADF}$:

$\overline{AF} = \sqrt{5}$

$S_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}, \overset{\Delta}{AMD}$ són semblants i de raó $\sqrt{5}:2$



Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AM} = \frac{2}{\sqrt{5}}\overline{AD} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\angle MAL = 45° - \alpha$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AML}$

$$\frac{\overline{ML}}{\overline{AM}} = \tan(45° - \alpha) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{ML} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{15}$$

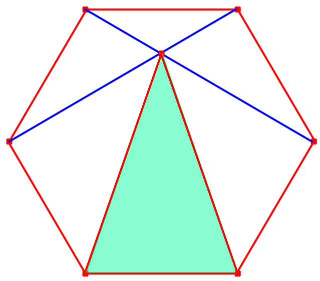
L'àrea del quadrilàter $AKLM$ és:

$$S_{AKLM} = \overline{AM} \cdot \overline{ML} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{15} = \frac{16}{15}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{AKLM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{16}{15}}{4} = \frac{4}{15}$$

3067.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.

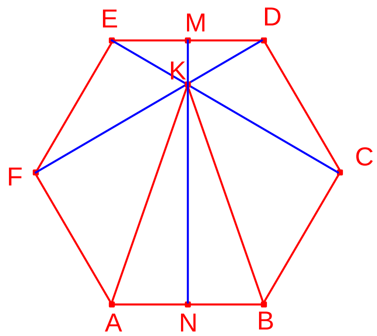


Solució 1:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga K la intersecció de les diagonals $\overline{CE}, \overline{DF}$

Siguen M, N les projeccions de K sobre els costats $\overline{DE}, \overline{AB}$, respectivament.



$\angle KDE = 30°$

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} c = \frac{\sqrt{3}}{6} c$$

$$\overline{MN} = \sqrt{3}$$

$$\overline{NK} = \frac{5\sqrt{3}}{6} c$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} c = \frac{5\sqrt{3}}{12} c^2$$

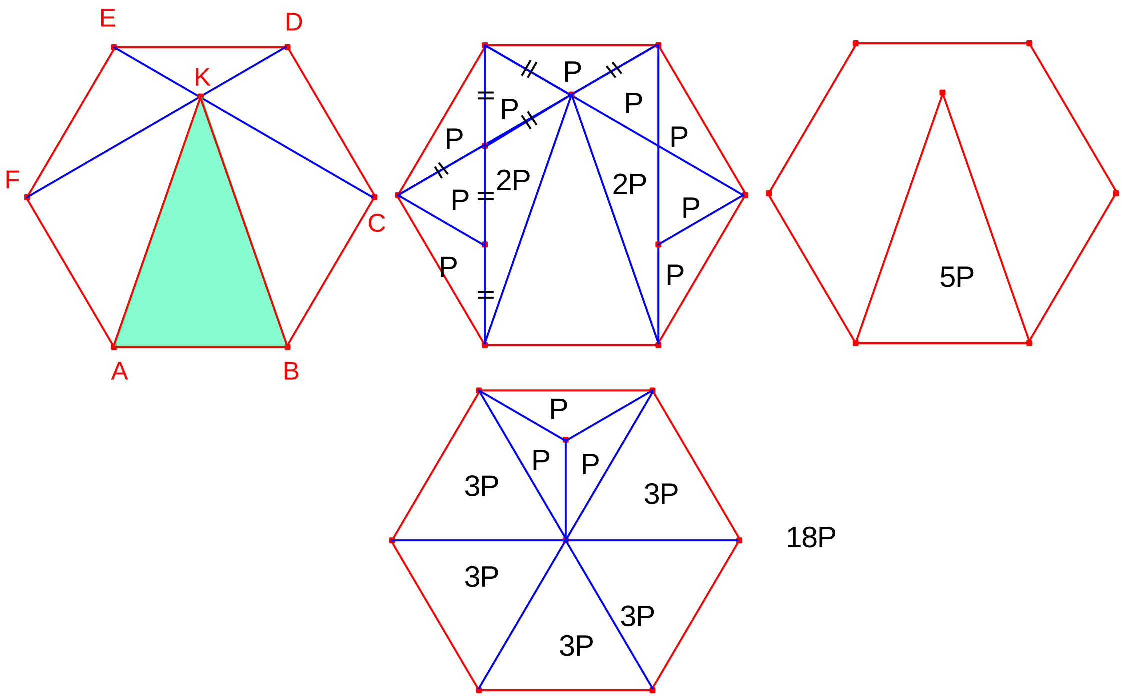
L'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2$$

La proporció de les àrees és:

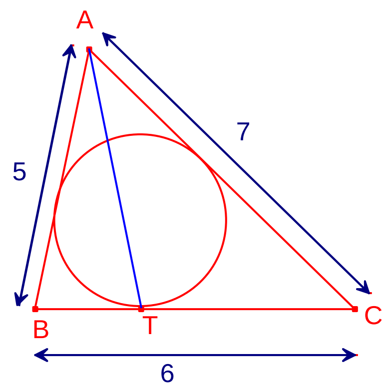
$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{12} c^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} c^2} = \frac{5}{18}$$

Solució 2:



$$\frac{S_{ABK}}{S_{ABCDEF}} = \frac{5}{18}$$

3068.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = 6, b = 7, c = 5$, T és el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AT}$.



Solució:

Siga $\overline{AH} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}6h = \frac{\sqrt{18 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}}{4}$$

Aleshores:

$h = 2\sqrt{6}$

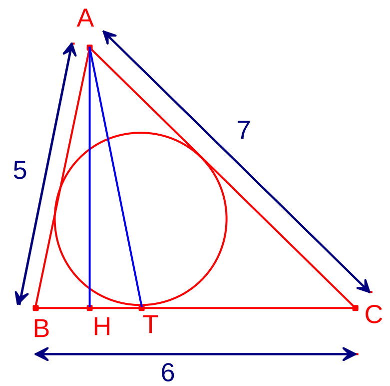
$$\overline{BT} = \frac{a + c - b}{2} = \frac{6 + 5 - 7}{2} = 2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHA}$:

$\overline{BH} = 5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2 = 1$

Aleshores:

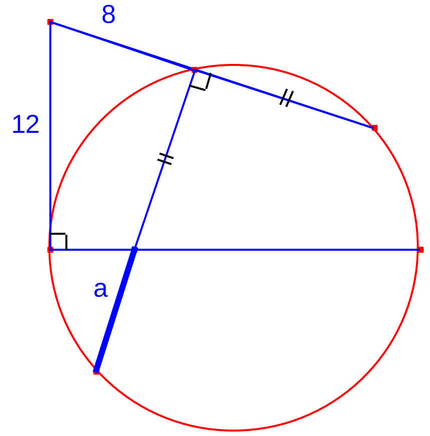
$\overline{HT} = 2 - 1 = 1$



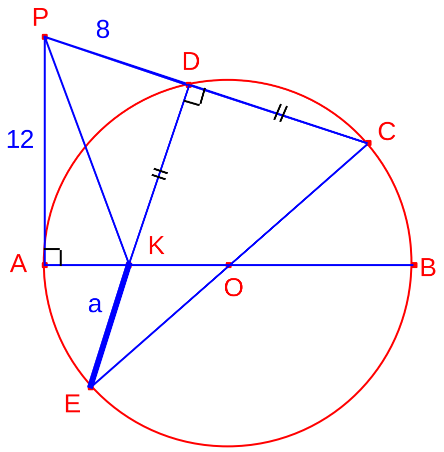
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BHA}, \overset{\Delta}{THA}$ són iguals, aleshores:

$\overline{AT} = \overline{AB} = 5$

3069.- En la figura, calculeu la mesura del segment a



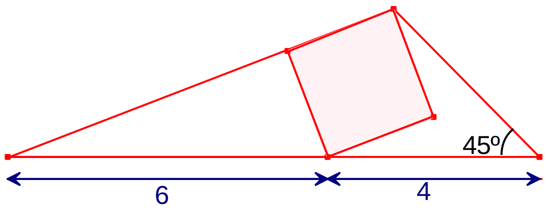
Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga $\overline{PA} = 12$ tangent a la circumferència.
Siga $\overline{P\acute{D}} = 8, \overline{CD} = \overline{DK} = x$
Siga $\overline{EK} = a$
Per ser $\angle CDE = 90°$, $\overline{CE}$ és diàmetre de la circumferència.
Aplicant la potència de P respecte de la circumferència:
$\overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PA}^2$
$8x = 12^2$
Resolent l'equació:
$x = 10$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDP}$:
$\overline{PK} = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAK}$:
$$\overline{AK} = \sqrt{\left(2\sqrt{41}\right)^2 - 12^2} = 2\sqrt{5}$$

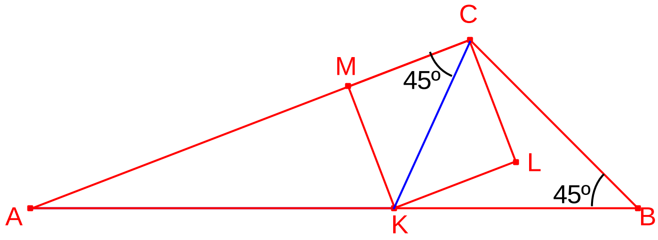
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$\overline{CE} = \sqrt{10^2 + (10 + a)^2} = \sqrt{a^2 + 20a + 200}$
Aplicant la potència de K respecte de la circumferència:
$\overline{AK} \cdot \overline{BK} = \overline{EK} \cdot \overline{DK}$
$2\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 20a + 200} - 2\sqrt{5}\right) = 10a$
Resolent l'equació:
$a = 3\sqrt{5}$

3070.- Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 45°, \overline{AB} = 10$
Siga $KLCM$ el quadrat de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\overline{AK} = 6, \overline{BK} = 4$
$\angle MCK = 45°$
Aplicant el teorema e Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMK}$:
$\overline{AM} = \sqrt{36 - c^2}$



Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ACK}$ són semblants, ja que tenen els angles corresponents iguals.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{10}{c + \sqrt{36 - c^2}} = \frac{c + \sqrt{36 - c^2}}{6}$$

$60 = 36 + 2c\sqrt{36 - c^2}$

$12 = c\sqrt{36 - c^2}$

Elevant al quadrat:

$c^4 - 36c^2 + 144 = 0$

Resolent l'equació, l'àrea del quadrat $KLCM$ és::

$c^2 = 18 - 6\sqrt{5}$