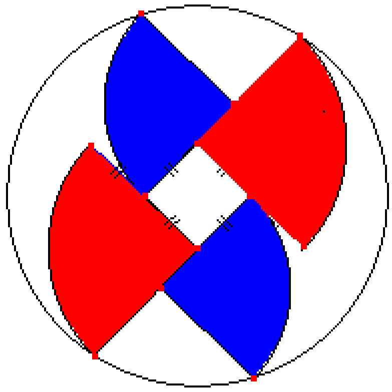
3071.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada pels quatre quadrants i l'àrea del cercle exterior.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$

Siga la circumferència exterior de centre $O$ i radi $\overline{OK} = R$

Siga el quadrant de centre $A$ i radi $\overline{OK} = 2a$

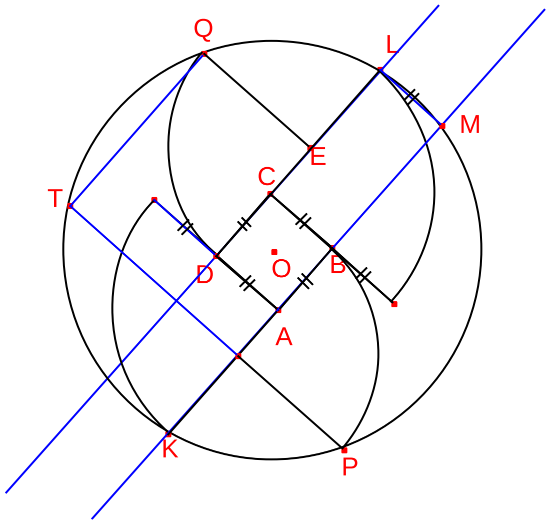
$\overline{KM} = 5a, \overline{LM} = a$

$\overline{KL} = 2R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KML}$:

$4R^2 = 26a^2$

$R^2 = \frac{13}{2}a^2$




Siga $\overline{CE} = b$

Siga el quadrant de centre $E$ i radi $\overline{ED} = \overline{EQ} = a + b$

$\overline{PT} = 3a + 2b, \overline{TQ} = a + 2b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTQ}$:

$4R^2 = (3a + 2b)^2 + (a + 2b)^2 = 10a^2 + 8b^2 + 16ab$

$26a^2 = 10a^2 + 8b^2 + 16ab$

$b^2 + 2ab - 2a^2 = 0$

Resolent l'equació:

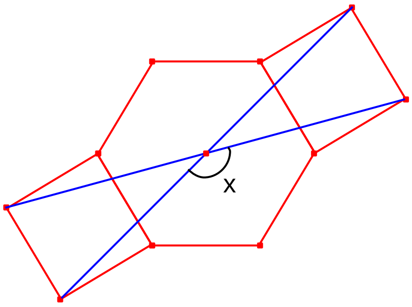
$\frac{b}{a} = -1 + \sqrt{3}$

$a + b = a\sqrt{3}$

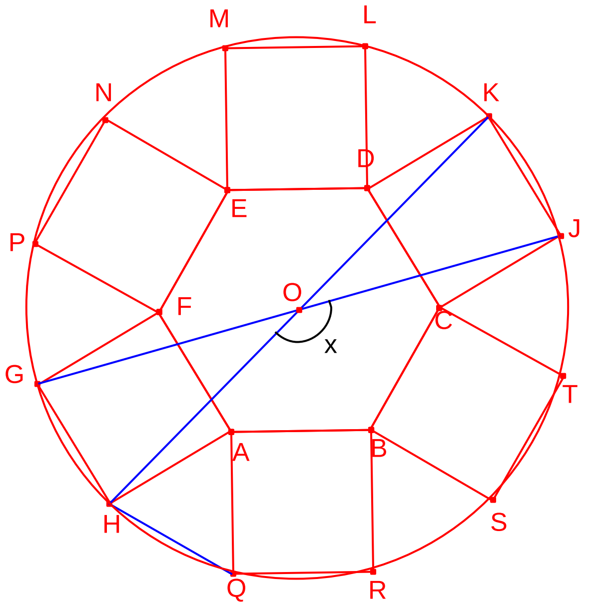
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot (2a)^2 + \frac{1}{2}\pi(a+b)^2}{\pi R^2} = \frac{2a^2 + \frac{3}{2}a^2}{\frac{13}{2}a^2} = \frac{7}{13}$$

3072.- Sobre dos costats oposats d'un
hexàgon regular s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle $x$




Solució:

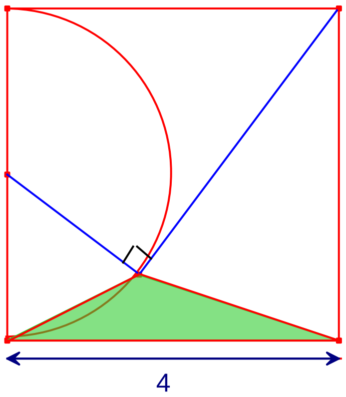



Siga $ABCDEF$ l'hexàgon regular.
El vèrtex de l'angle $x$ és el centre $O$ de l'hexàgon
Siguen els quadrats $AFGH, CJKD$.
Sobre els altres costats de l'hexàgon construïm 4 quadrats.
$\angle HAQ = 60°$
$\overline{HQ} = \overline{AH} = \overline{GH}$
Aleshores, $\overline{GH}$ és el costat del dodecàgon regular de centre $O$.

$$\angle GOH = \frac{360°}{12} = 30°$$

Aleshores, $x = \angle HOJ = 180° - \angle GOH = 150°$

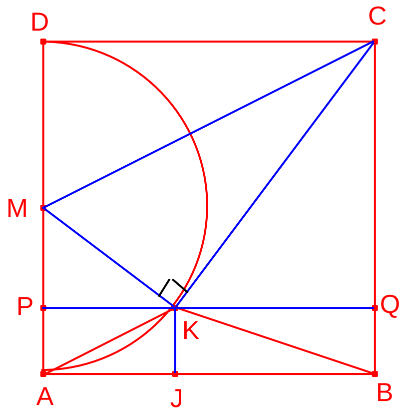
3073.- Calculeu l'àrea del triangle ombrejat interior al quadrat de costat 4.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ centre de la semicircumferència.
$\overline{MD} = \overline{MK} = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MDC}$:
$\overline{CM} = 2\sqrt{5}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MKC}$:
$\overline{CK} = 4$



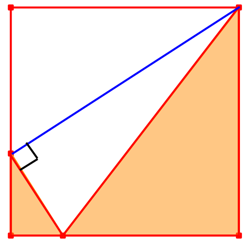

Siga $J$ la projecció de $K$ sobre el costat$\overline{AB}$.
Siga $\overline{JK} = h$ alura del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$
Siguen $P, Q$ les projección de $K$ sobre els costats $\overline{AD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga $\overline{KQ} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KQC}$:
$4^2 = (4-h)^2 + x^2$
Simplificant:
$h^2 - 8h + x^2 = 0$

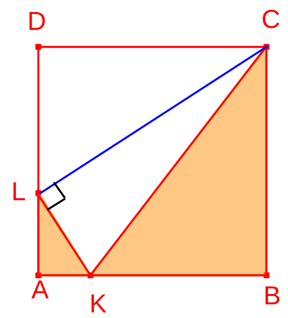
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPM}$:
$2^2 = (2-h)^2 + (4-x)^2$

Restant ambdues expressions:
$2x - h = 4$
$$x = \frac{4+h}{2}$$
$$h^2 - 8h + \left(\frac{4+h}{2}\right)^2 = 0$$
$5h^2 - 24h + 16 = 0$
Resolent l'equació:
$$h = \frac{4}{5}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és:
$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h = \frac{8}{5}$$

3074.- Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada de l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$




Siguen els triangles rectangles ombrejats $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{KBC}$
Siga $x = \overline{DL}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{DLC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AK}}{c-x} = \frac{x}{c}$$

$$\overline{AK} = \frac{x(c-x)}{c}, \overline{BK} = c - \frac{x(c-x)}{c}$$

L'àrea ombrejada és la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{KBC}$:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x(c-x)}{c}(c-x)\right) + \frac{1}{2}\left(c - \frac{x(c-x)}{c}\right)c, \qquad 0 \le x \le c$$

Simplificant:

$$S(x) = \frac{1}{2c}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$S'(x) = \frac{3}{2c}x^2 - x$$

$$S'(x) = 0$$

$$x = \frac{2}{3}c$$

$$S''(x) = \frac{3}{c}x - 1$$

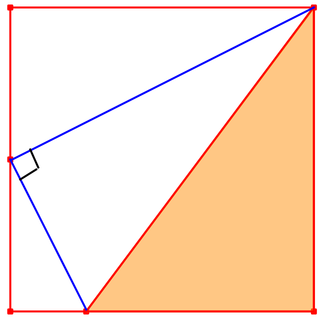
$$S''\left(\frac{2}{3}c\right) = 1 > 0$$

Aleshores, $x = \frac{2}{3}c$ és un mínim relatiu.
L'àrea mínima és:

$$S\left(\frac{2}{3}c\right) = \frac{23}{54}c^2$$

La proporció mínima és $\frac{23}{54}$

3075.- Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada de l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Sia el triangle rectangles ombrejat $\overset{\Delta}{KBC}$

Siga $x = \overline{DL}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKL}, \overset{\Delta}{DLC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AK}}{c-x} = \frac{x}{c}$$

$$\overline{AK} = \frac{x(c-x)}{c}, \overline{BK} = c - \frac{x(c-x)}{c}$$

Siga $S(x)$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(c - \frac{x(c-x)}{c}\right)c, \qquad 0 \le x \le c$$

Simplificant:

$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + c^2)$$

La funció és una paràbola còncava.

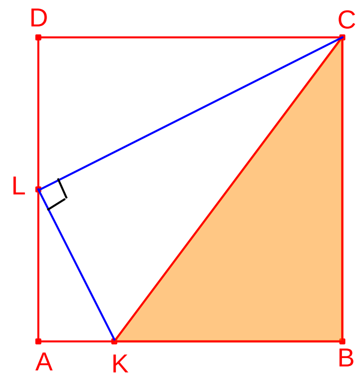
El mínim s'assoleix en el vèrtex

$$x = \frac{1}{2}c$$

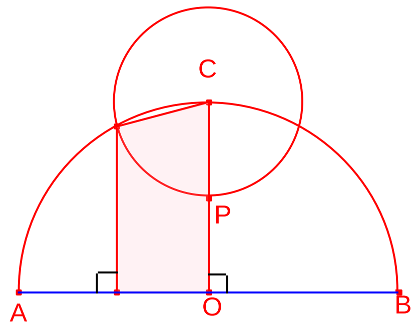
L'àrea mínima és:

$$S\left(\frac{1}{2}c\right) = \frac{3}{8}c^2$$

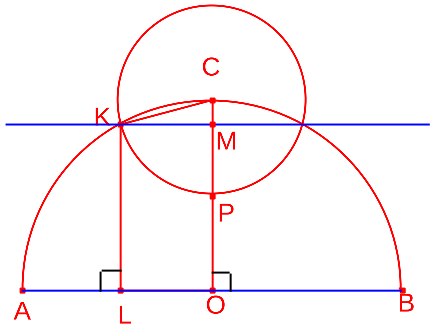
La proporció mínima és $\frac{3}{8}$



3076.- En la figura, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 10$.
$P$ és el punt mig del segment $\overline{OC}$
Calculeu l'àrea de a zona ombrejada.

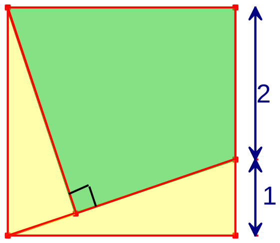



Solució:
Siga el trapezi rectangle $OCKL$.
Siga $M$ la projecció del punt $K$ sobre el segment $\overline{OC}$
Siguen $\overline{KM} = a, \overline{OM} = \overline{LK} = b$
$\overline{OK} = 10, \overline{CK} = 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KMC}, \overset{\Delta}{KMO}$:

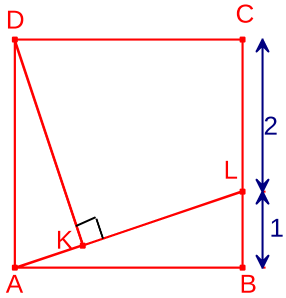



$a^2 = 25 - (10 - b)^2$
$a^2 = 100 - b^2$
Igualant ambdues expressions:
$25 - (10 - b)^2 = 100 - b^2$
Simplificant:
$b = \dfrac{35}{4}, a = \dfrac{5\sqrt{15}}{4}$
L'àrea del trapezi $OCKL$ és:
$S_{OCKL} = \dfrac{1}{2}\left(10 + \dfrac{35}{4}\right)\dfrac{5\sqrt{15}}{4} = \dfrac{375\sqrt{15}}{32} \approx 45.3865$

3077.- En la figura, el quadrat s'ha dividit en dos triangles rectangles i un quadrilàter.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter i a suma de les àrees dels dos triangles.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 3$




Siguen els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{LBA}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LBA}$:
$\overline{AL} = \sqrt{10}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{LBA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AK}}{1} = \frac{\overline{DK}}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\overline{AK} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \overline{DK} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

La suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{LBA}$ és:

$$S_{groga} = S_{AKD} + S_{ABL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{57}{20}$$

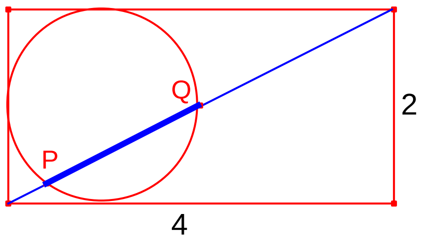
L'àrea del quadrilàter $KLCD$ és:

$$S_{KLCD} = S_{ABCD} - S_{groga} = 9 - \frac{57}{20} = \frac{123}{20}$$

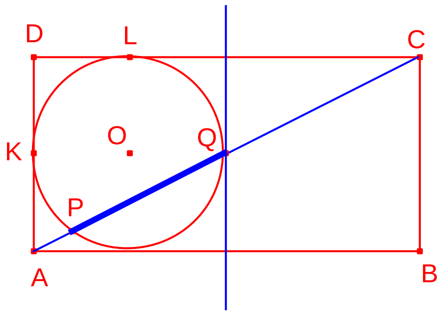
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KLCD}}{S_{groga}} = \frac{\frac{123}{20}}{\frac{57}{20}} = \frac{41}{19}$$

3078.- El rectangle de la figura de costats 4, 2 té una circumferència tangent a tres costats.
La diagonal talla la circumferència en els punts $P, Q$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$

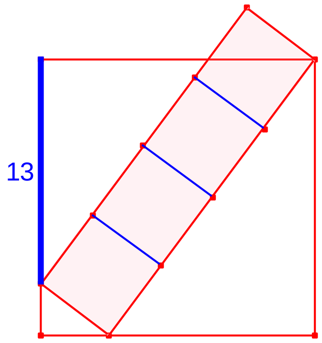



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 4, \overline{AD} = 2$
La circumferència té radi 1.
Siga $K$ el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AD}$
Notem que $Q$ és el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.

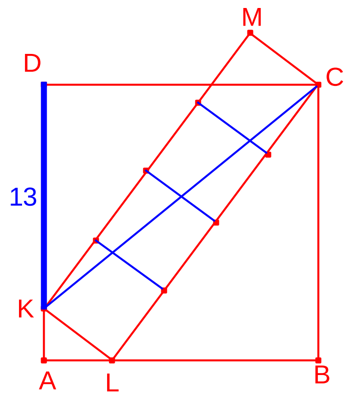



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 2\sqrt{5}$
$\overline{AQ} = \sqrt{5}$
Aplicant la potència del punt $A$ respecte de la circumferència:
$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AK}^2$
$\overline{AP} \cdot \sqrt{5} = 1$
$\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

3079.- A la figura hi ha 5 quadrats.
Els quatre menuts són iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.




Solució:




Siga el quadrat $ABCD$
Siga $K$ del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{DK} = 13$
Siga $\overline{AK} = a$
Siga $\overline{KL} = c$ costat del quadrats.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KAL}, \overset{\Delta}{LBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{13 + a} = \frac{c}{4c} = \frac{1}{4}$$

Simplificant:

$$16(c^2 - a^2) = 169 + a^2 + 26a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KCD}$

$$169 + 169 + a^2 + 26a = 17c^2$$

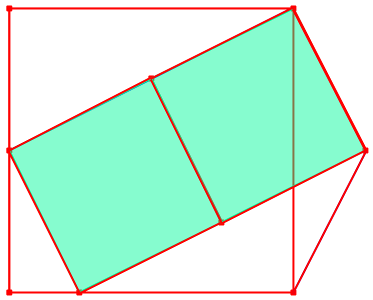
Resolent l'equació:

$$a = 3, c = 5$$

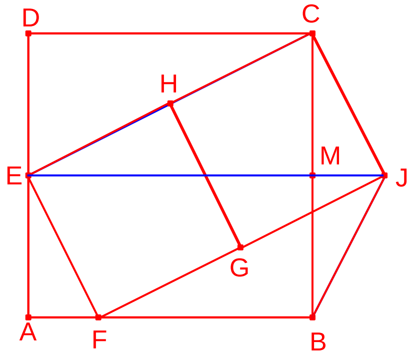
L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_{KLCM} = 4 \cdot 5^2 = 100$$

3080.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada formada per dos quadrats iguals i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els quadrats iguals $EFGH, HGJC$ de costat $\overline{EF} = a$
Siga $\overline{DE} = x$




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{EAF}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{c-x} = \frac{2a}{a} = 2$$
Simplificant:
$c = 2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$
$$4a^2 = c^2 + \frac{1}{4}c^2$$
$$a^2 = \frac{5}{16}c^2$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{ECJ}$ són semblants ja que
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CJ}}{\overline{CE}} = \frac{1}{2}$$
Aleshores, $\overline{EJ}$ és paral·lel a $\overline{CD}$
$\overline{EJ}$ és paral·lela mitjana del quadrat $ABCD$.
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{BC}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CMJ}, \overset{\Delta}{ECJ}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{MJ} = \frac{1}{2}\overline{CM} = \frac{1}{4}c$$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{EFJC}}{S_{ABJCD}} = \frac{2a^2}{c^2 + \frac{1}{2}\cdot c \cdot \frac{1}{4}c} = \frac{2\cdot\frac{5}{16}c^2}{\frac{9}{8}c^2} = \frac{5}{9}$$