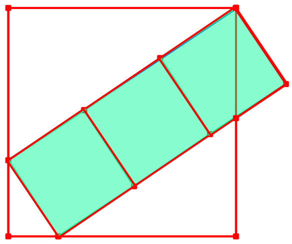
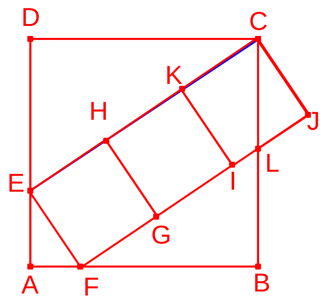
3081.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada formada per tres quadrats iguals i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els quadrats iguals $EFGH, HGIK, IJCK$ de costat $\overline{EF} = a$
Siga $\overline{DE} = x$

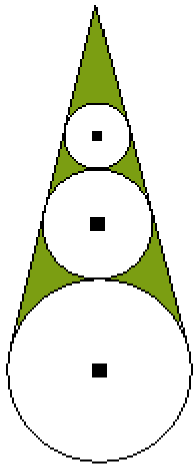


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{EAF}$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{c-x} = \frac{3a}{a} = 3$$
Simplificant:
$$2c = 3x$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$
$$9a^2 = c^2 + \frac{4}{9}c^2$$
$$a^2 = \frac{13}{81}c^2$$

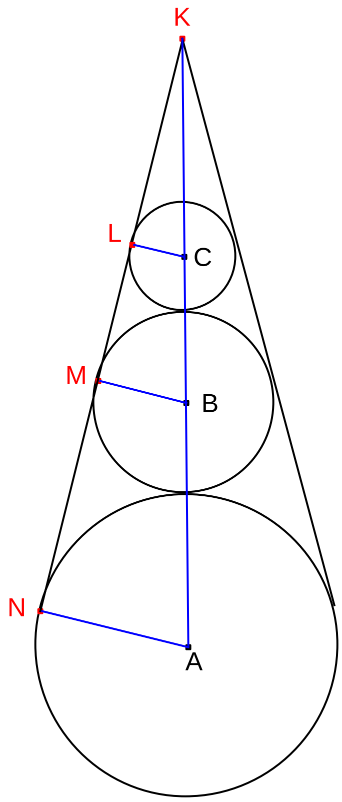
$$\overline{AE} = \frac{1}{3}c$$
$$\overline{AF} = \frac{2}{3}\overline{AE} = \frac{2}{9}c, \overline{BF} = \frac{7}{9}c$$
$$\overline{BL} = \frac{2}{3}\overline{BF} = \frac{2}{9}c, \overline{BF} = \frac{14}{27}c$$

L'àrea total és igual a l'àrea dels tres quadrats iguals més l'àrea dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{EAF}, \overset{\Delta}{FBL}$:
$$S_{ABLJCD} = 3a^2 + \frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}\frac{1}{3}c \cdot \frac{2}{9}c + \frac{1}{2}\frac{7}{9}c \cdot \frac{14}{27}c = \frac{13}{27}c^2 + \frac{139}{243}c^2 = \frac{256}{243}c^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{EFJC}}{S_{ABLJCD}} = \frac{2a^2}{\frac{256}{243}c^2} = \frac{\frac{13}{27}c^2}{\frac{256}{243}c^2} = \frac{117}{256}$$

3082.- En la figura, els radis de les circumferències són $20, 12, r$
Calculeu el radi r de la circumferència menuda.



Solució:
Siguen A, B, C els centres de les circumferències de radis $\overline{AN} = 20, \overline{BM} = 12, \overline{CL} = r$.
$\overline{AB} = 32, \overline{BC} = 12 + r$
Siga $\overline{KC} = a$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KAN}, \overset{\Delta}{KBM}, \overset{\Delta}{KCL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

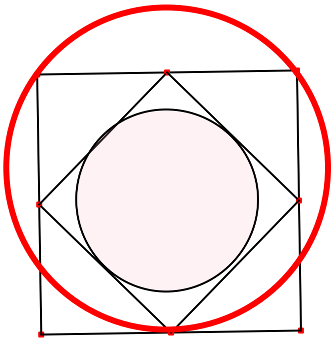
$$\frac{20}{42 + r + a} = \frac{12}{12 + r + a} = \frac{r}{a} = \frac{20 - r}{44 + r} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{20 - r}{44 + r} = \frac{1}{4}$$

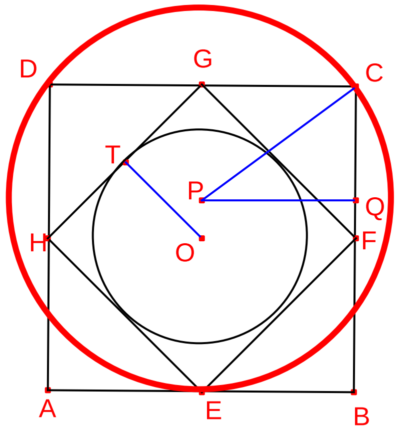
Resolent l'equació:

$$r = \frac{36}{5}$$

3083.- En la figura, hi ha dos quadrats i dos cercles
El cercle gran té àrea 25π
Calculeu l'àrea del cercle morat.

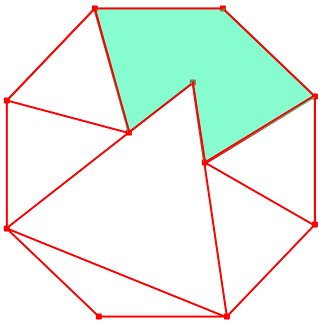


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, EFGH$ de centre O.
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OT} = r$
$\overline{EF} = 2r$
$\overline{AB} = \overline{EF}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}r$



Siga la circumferència de centre P que passa pels punts C, D, E i radi $\overline{PE} = \overline{PC} = R$
L'àrea és 25π
$25\pi = \pi R^2$
Resolent l'equació:
$R = 5$
Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$.
$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} = r\sqrt{2}, \overline{CQ} = \overline{AB} - R = 2\sqrt{2}r - 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC}$:
$5^2 = 2r^2 + 8r^2 - 20\sqrt{2}r + 5^2$
$10r = 20\sqrt{2}$
$r = 2\sqrt{2}$
L'àrea del cercle de centre O és:
$S_O = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi$

3084.- Es dibuixen tres triangles equilàters en un octògon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea de l'octògon regular.



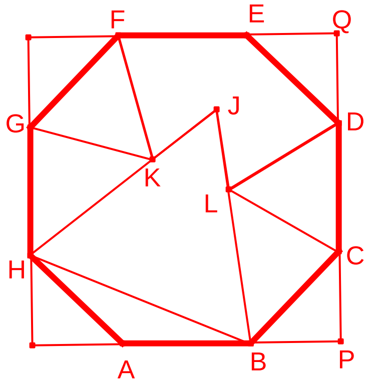
Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{FGK}, \overset{\Delta}{CDL}, \overset{\Delta}{BJH}$

$\angle HAB = 135°$

$\angle ABH = \frac{1}{2}45°$

$\angle LBC = \frac{1}{2}105°, \angle BCL = 75°$



L'octògon regular està inscrit en un quadrat de costat

$\overline{PQ} = c + c\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})c$

L'àrea de l'octògon regular és:

$s_{ABCDEFGH} = \left((1+\sqrt{2})c\right)^2 - c^2 = (2+2\sqrt{2})c^2$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$

$\overline{BH}^2 = c^2 + c^2 + 2c^2\frac{\sqrt{2}}{2} = (2+\sqrt{2})c^2$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea de l'octògon regular menys la suma de les àrees dels sis triangles $\overset{\Delta}{FGK}, \overset{\Delta}{CDL}, \overset{\Delta}{BJH}, \overset{\Delta}{ABH}, \overset{\Delta}{GHK}, \overset{\Delta}{CDL}$

$$S_{DEFGHKJL} = S_{ABCDEFGH} - 2 \cdot S_{FGK} - S_{BJH} - S_{ABH} - 2 \cdot S_{GHK}$$

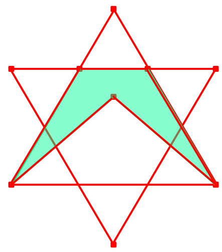
$$S_{DEFGHKJL} = (2+2\sqrt{2})c^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{2})c^2 - \frac{1}{2}c^2\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{1}{2}c^2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{DEFGHKJL} = \frac{4+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$$

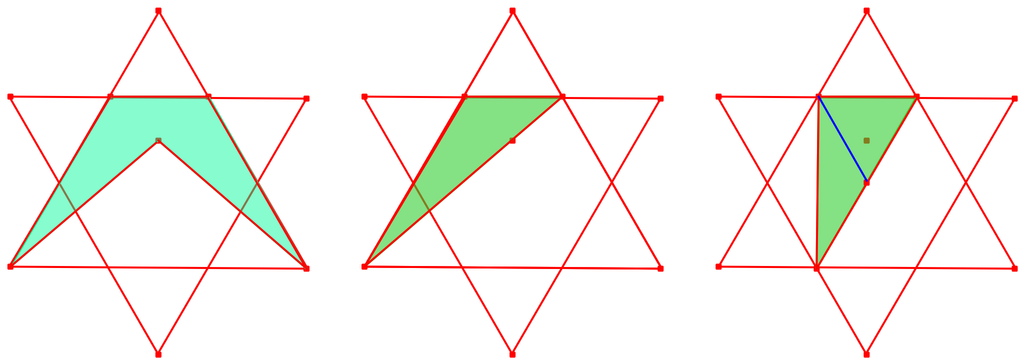
La proporció de les àrees és:

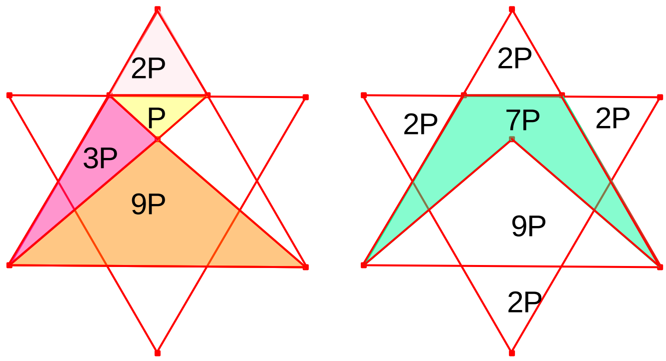
$$\frac{S_{DEFGHKJL}}{S_{ABCDFGH}} = \frac{\frac{4+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}}{2+2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3085.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'estel de 6 puntes.



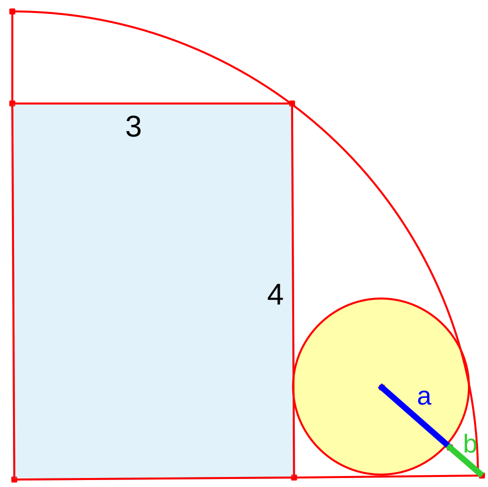
Solució:



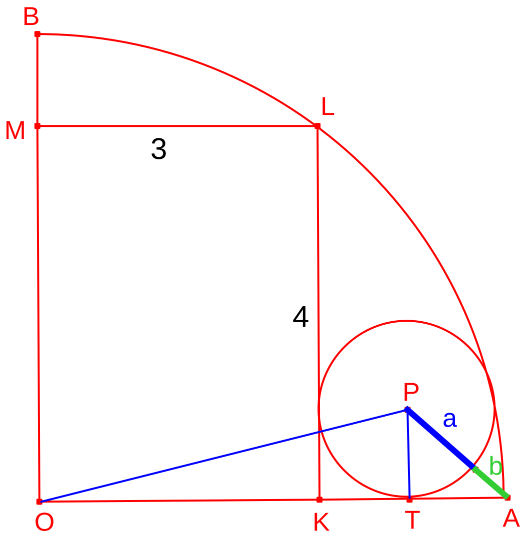


7P/24P=7/24

3086.- En un quadrant s'ha dibuixat un rectangle 3×4 i una circumferència tangent al rectangle i al quadrant.
Calculeu la proporció $\frac{a}{b}$



Solució:

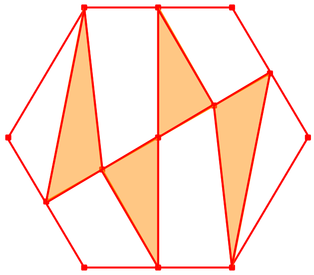


Siga el rectangle $OKLM$ de costats $\overline{OK} = 3, \overline{KL} = 4$
$\overline{OL} = 5$, radi del quadrant de centre O.
Siga P en centre de la circumferència de radi $\overline{PT} = a$
$\overline{OP} = 5 - a, \overline{OT} = 3 + a$

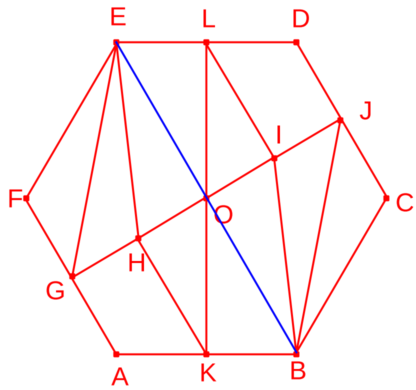
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$(5-a)^2 = a^2 + (3+a)^2$
Simplificant l'expressió:
$a^2 + 16a - 16 = 0$
Resolent l'equació:
$a = -8 + 4\sqrt{5} = 4\left(-2 + \sqrt{5}\right)$
$\overline{TA} = 2 - a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$\overline{AP}^2 = a^2 + (2-a)^2 = 36\left(9 - 4\sqrt{5}\right) = 36(-2 + \sqrt{5})^2$
$\overline{AP} = 6\left(-2 + \sqrt{5}\right)$
$a + b = 6\left(-2 + \sqrt{5}\right)$
$b = 6\left(-2 + \sqrt{5}\right) - 4\left(-2 + \sqrt{5}\right) = 2\left(-2 + \sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}a$
$\frac{a}{b} = 2$

3087.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea de l'hexàgon exterior.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
$\overline{GJ} = \overline{KL} = c\sqrt{3}$
$\angle GOK = 60°$
$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$
Aleshores:



$\overline{GH} = \overline{OH} = \overline{OI} = \overline{IJ} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$

$\overline{HK} = \frac{\overline{AG} + \overline{OB}}{2} = \frac{3}{4}c$

$S_{HOK} = \frac{1}{2}\overline{OH} \cdot \overline{HK} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c \cdot \frac{3}{4}c$

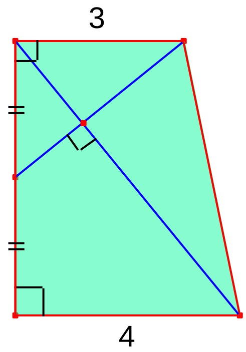
$S_{GHE} = \frac{1}{2}\overline{GH} \cdot \overline{OE} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c \cdot c$

$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{2 \cdot S_{HOK} + 2 \cdot S_{GHE}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{7}{24}$$

3088.- Calculeu l’àrea del trapezi rectangle de costats paral·lels que mesuren 3, 4.



Solució:
Siga el trapezi rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = 4, \overline{CD} = 3$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$
Siga $\overline{AM} = \overline{DM} = a$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{DCM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

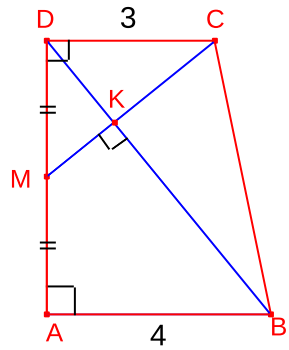
$$\frac{3}{2a} = \frac{a}{4}$$

Resolent l’equació:

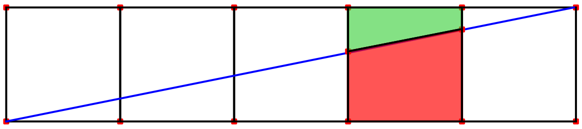
$$a = \sqrt{6}$$

L’àrea del trapezi ABCD és:

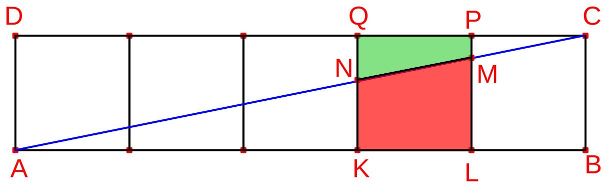
$$S_{ABCD} = \frac{4+3}{2} 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$$



3089.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea roja.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 1$ format per 5 quadrats iguals.
Sigua el trapezi $KLMN$ de costats paral·lels $\overline{KN} = a, \overline{LM} = b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKN}, \overset{\Delta}{ALM}$ són semblants i de raó 3:4
Aplicant el teorema de Tales:

$$a = \frac{3}{4}b$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALM}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 4:5
Aplicant el teorema de Tales:

$$b = \frac{4}{5}$$

Aleshores:

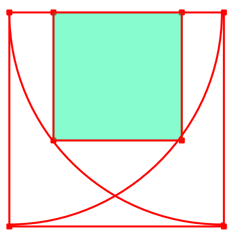
$$a = \frac{3}{5}$$

$$a + b = \frac{7}{5}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{roja}} = \frac{\frac{2-(a+b)}{2}}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2-\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$$

3090.- En dos vèrtexs, com centres, d'un quadrat de costat 5, s'han dibuixat dos quadrants.
Calculeu l'àrea del quadrat que té dos vèrtexs sobre els quadrats i dos vèrtexs sobre el costat del quadrat inicial.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 5$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$

$\overline{KM} = c\sqrt{2}, \overline{CM} = \dfrac{5-c}{2}, \overline{CK} = 5$

$\angle KMV = 135°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KCM}$:

$$5^2 = 2c^2 + \left(\frac{5-c}{2}\right)^2 + 2c\sqrt{2} \cdot \frac{5-c}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Simplificant:
$c^2 + 2c - 15 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 3$
L'àrea del quadrat $KLMN$ és:
$S_{KLMN} = c^2 = 9$