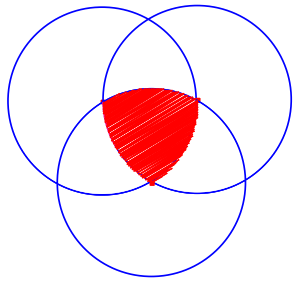
Problemes de Geometria per a l'ESO 31

301.- En la figura hi ha tres cercles de radi 2. El centre de cada cercle és la intersecció de altres dos. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Els centres A, B, C dels 3 cercles formen un triangle equilàter de costat 2.
L'àrea de la zona ombrejada és igual a la suma de les àrees del triangle equilàter de costat 2 i l'àrea de 3 segments circulars de 60º i radi 2.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

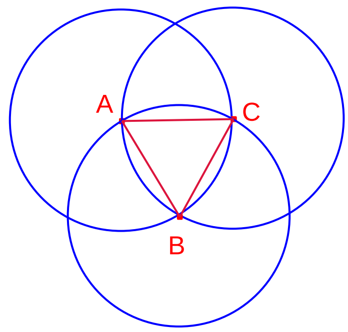
$$S_{ABC}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\,.$$

L'àrea d'un segment circular de radi 2 i 60º és:

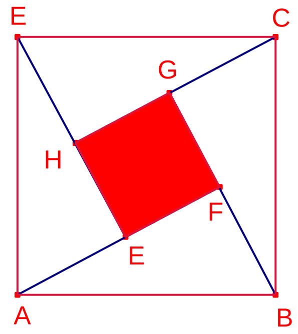
$$S_{segment}=\frac{1}{6}\pi\cdot 2^2-\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\,.$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada}=S_{ABC}+3\cdot S_{segment}=\sqrt{3}+3\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=2\pi-2\sqrt{3}\,.$$



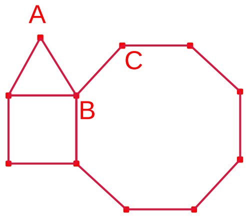
302.- En el dibuix, ABCD és un quadrat de costat 17, Els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{DAE}$, $\overset{\Delta}{BCG}$ i $\overset{\Delta}{CDH}$ són rectangles i iguals.
Si $\overline{BF} = 8$ determineu l'àrea del quadrilàter EFGH ombrejat.



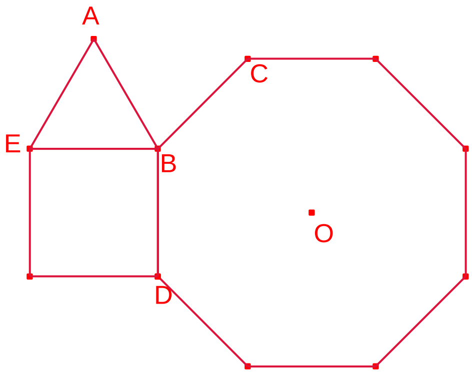
Solució:
Notem que EFGH és un quadrat, ja que els quatre triangles de l'enunciat són iguals.
$\overline{AE} = \overline{BF} = 8$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{AF} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = 15 - 8 = 7$.
L'àrea del quadrat EFGH és:
$S_{EFGH} = \overline{EF}^2 = 7^2 = 49$.

303.- En la figura, sobre un costat d'un octògon regular s'ha dibuixat un quadrat i sobre el costat d'un quadrat s'ha dibuixat un triangle equilàter. Calculeu l'angle $\angle BAC$.



Solució:



Notem que els costats de l'octògon el quadrat i el triangle equilàter són iguals.

Aleshores, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
L'angle interior de l'octògon regular és:

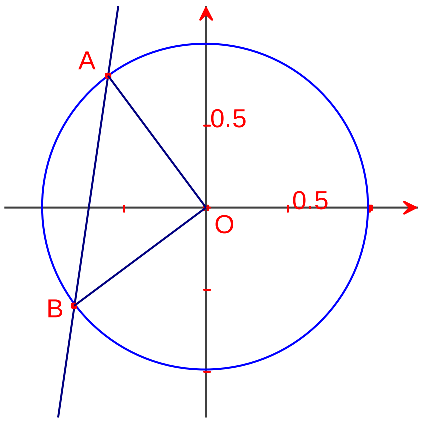
$$\angle CBD = 180^{o} - \angle BOC = 180^{o} - \frac{360^{o}}{8} = 135^{o} .$$

$$\angle ABC = 360^{o} - (\angle CBD + \angle DBE + \angle ABE) = 360^{o} - (135^{o} + 90^{o} + 60^{o}) = 75^{o} .$$

$$\angle BAC = \frac{180^{o} - \angle ABC}{2} = \frac{180^{o} - 75^{o}}{2} = 52^{o}30' .$$

304.- La circumferència $x^2+y^2=1$ s'intersecta amb la recta $y=7x+5$ en els punts A i B.
Si O és el centre de la circumferència, calculeu la mesura de l'angle $\angle AOB$.

Solució:
$x^2+y^2=1$ és la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi 1.



La intersecció de la circumferència i la recta és la solució dels sistema:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=7x+5 \end{cases}$, les solucions d'aquest són $\begin{cases} x=\frac{-3}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{-4}{5} \\ y=\frac{-3}{5} \end{cases}$.

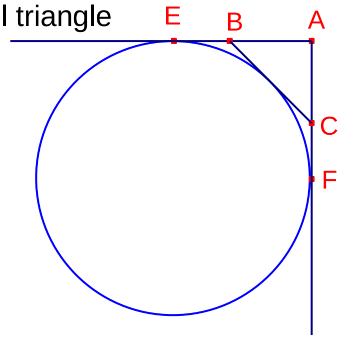
Les coordenades dels punts d'intersecció són:
$A\left(\frac{-3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $B\left(\frac{-4}{5},\frac{-3}{5}\right)$.

Per ser A i B de la circumferència, $\overline{OA}=\overline{OB}=1$.

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{-4}{5}-\frac{-3}{5}\right)^2+\left(\frac{-3}{5}-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

Aleshores, $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és rectangle i isòsceles, per tant, $\angle AOB=90º$, $\angle OAB=OBA=45º$.

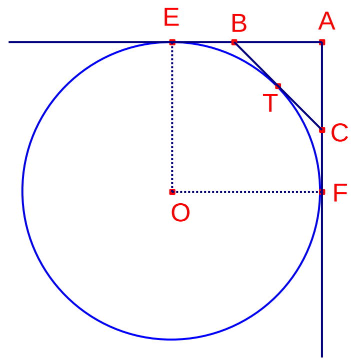
305.- En la figura, la circumferència és tangent a la hipotenusa del triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, la recta AC és tangent a la circumferència en el punt F i la recta AB és tangent a la circumferència en el punt E.



Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 9, quina és l'àrea del cercle?.

Solució:
Siga O en el centre de la circumferència.
Per ser E, F punts de tangència, $\overline{AE} = \overline{AF}$.

$\overline{OF}$ és perpendicular a la recta AC, $\overline{OE}$ és perpendicular la la recta AE.
Aleshores, OFAE és un quadrat.
El radi de la circumferència és $r = \overline{OF} = \overline{AE}$.



Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és):

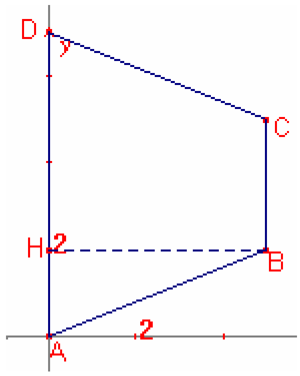
$9 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$, $\overline{AB}^2 = 18$. $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{BC}^2 = 2 \cdot \overline{AB}^2 = 2 \cdot 18 = 36$.

Aleshores, $\overline{BC} = 6$.

Siga T el punt de tangència de la hipotenusa $\overline{BC}$ i la circumferència.
Per ser, E i T punts de tangència: $\overline{BT} = \overline{BE}$.
Per ser, F i T punts de tangència: $\overline{CT} = \overline{CF}$.
Com que $\overline{AE} = \overline{AF}$ i $\overline{AB} = \overline{AC}$, tenim que $\overline{BE} = \overline{CF}$.
Per tant, $\overline{BT} = \overline{CT} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$.
El radi de la circumferència és:
$r = \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = 3\sqrt{2} + 3$.
L'àrea del cercle és:
$S_{cercle} = \pi\left(3\sqrt{2} + 3\right)^2 = 9\pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

306.- Considerem els punts $A(0,0), B(b,2), C(b,5), D(0,d)$, on b i d són enters positius, que formen un trapezi d'àrea 25.
Determineu els valors possibles de b i d.
Kömal K292.



Solució:
Els segments $\overline{AD}=d$, $\overline{BC}=3$ són paral·lels.
L'altura de trapezi és: $\overline{BH}=b$.
L'àrea del trapezi és:
$\frac{(d+3)b}{2}=25$.
$(d+3)b=50$, $d, b\in N$.

$\begin{cases} d+3=5 \\ b=10 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} d=2 \\ b=10 \end{cases}$.

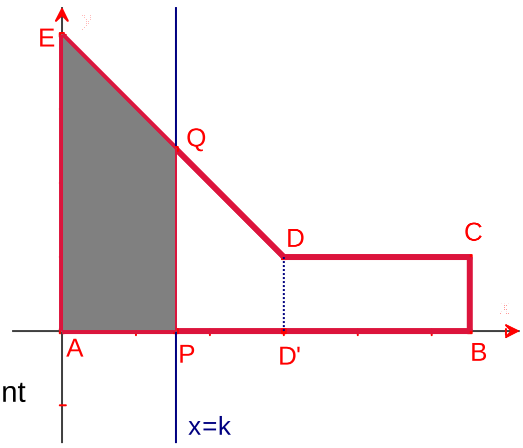
$\begin{cases} d+3=10 \\ b=5 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} d=7 \\ b=5 \end{cases}$.

$\begin{cases} d+3=25 \\ b=2 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} d=23 \\ b=2 \end{cases}$.

$\begin{cases} d+3=50 \\ b=1 \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} d=47 \\ b=1 \end{cases}$.

307.- ABCDE és un pentàgon que té vèrtexs $A(0,0)$, $B(11,0)$, $C(11,2)$, $D(6,2)$, $E(0,8)$.

Volem dividir el pentàgon en dos polígons d'igual àrea mitjançant una recta de la forma $x=k$. Determineu el valor de k.



Solució:

Siga D' la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
L'àrea del polígon ABCDE és igual a la suma l'àrea del rectangle BCDD' i l'àrea del trapezi AD'DE.

$$S_{ABCDE}=5\cdot 2+\frac{8+2}{2}6=40.$$

L'àrea del rectangle BCDC' és 10 per tant el valor de k pertanys a $]0,6[$.

La recta $x=k$ talla el segment $\overline{AD'}$ en el punt P, i el segment $\overline{DE}$ en el punt Q.
La recta DE té equació: $r_{DE}\equiv y=-x+8$.
Les coordenades de P i Q són:
$P(k,0)$, $Q(k,8-k)$

$\overline{PQ}=8-k$.

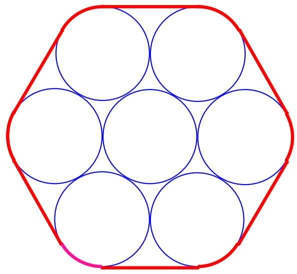
L'àrea del trapezi APQE és la meitat del pentàgon ABCDE, és a dir, 20.

$$S_{APQE}=\frac{\overline{AE}+\overline{PQ}}{2}\overline{AP}.$$

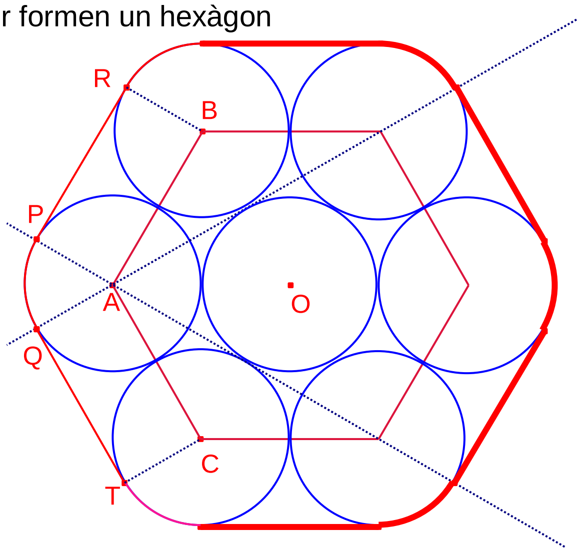
$$\frac{8+8-k}{2}k=20.$$

Resolent l'equació $k=8-2\sqrt{6}$.

308.- La imatge mostra 7 monedes iguals de radi 1 que s'han col·locat tangents unes a les altres. Hem posat un cordó al voltant de les monedes. Quina és la longitud del cordó?.
Cangur 2011. nivell 3. problema 9.

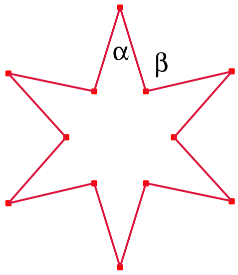


Solució:
Els centres de les 6 circumferències (monedes) exterior formen un hexàgon regular de costat 2.
Considerem la circumferència de centre A.
Siguen P i Q els punt de tangència del cordó i la circumferència.
Considerem la circumferència de centre B, Siga R el punt de tangència del cordó i la circumferència més proper a P.
Considerem la circumferència de centre C, Siga T el punt de tangència del cordó i la circumferència més proper a Q.
Per ser el cordó tangent a les circumferències:
$\overline{AP}$ és perpendicular a $\overline{PR}$ i a $\overline{AB}$.
$\overline{AQ}$ és perpendicular a $\overline{QT}$ i a $\overline{AC}$.

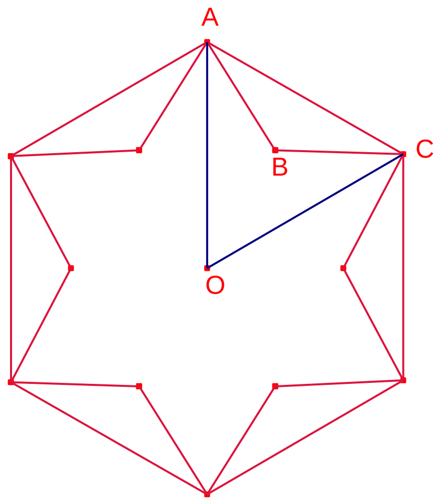


L'angle interior d'un hexàgon regular és $\angle BAC = 120^\circ$.
Aleshores, $\angle PAQ = 60^\circ$.
El perímetre p de la corda és igual a una circumferència de radi 1 i 6 segments iguals a $\overline{PR} = \overline{AB} = 2$.
El perímetre és:
$p = 2\pi \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 12 + 2\pi$.

309.- Lluïsa ha dibuixat una estrella de 6 puntes regular de tal forma que l'angle exterior β és el doble de l'angle interior α.
Calculeu l'angle α.
Proves Cangur 2011. Nivell 3. problema 15.



Solució:
L'estrella està inscrita en un hexàgon regular de centre O.
Siguen A i B, C tres vèrtexs consecutius de l'estrella.



$\overset{\Delta}{OAC}$ és un triangle equilàter, $\angle OAC = 60^{\circ}$

$\angle OAB = \frac{\alpha}{2}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles, $\angle BAC = 90^{\circ} - \frac{\beta}{2}$.

Aleshores, $\frac{\alpha}{2} + 90^{\circ} - \frac{\beta}{2} = 60^{\circ}$.

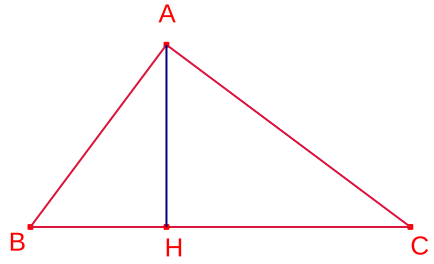
Per hipòtesi $\beta = 2\alpha$.

Resolent el sistema $\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + 90^{\circ} - \frac{\beta}{2} = 60^{\circ} \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$:

$\begin{cases} \alpha = 60^{\circ} \\ \beta = 120^{\circ} \end{cases}$.

L'àrea d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 54 i la longitud del catet $\overline{AC}$ és mitjana aritmètica del catet $\overline{AB}$ i la hipotenusa $\overline{BC}$. Quina és la longitud de l'altura sobre la hipotenusa?.
Proves Cangur 2011. Nivell 3. Problema 21.

Solució:



Siga $h=\overline{AH}$ altura sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC}=\dfrac{bc}{2}=\dfrac{ah}{2}=54$.

Aleshores, $bc=108$.

Per hipòtesi $b=\dfrac{a+c}{2}$.

Aleshores, $a=2b-c$. Elevant al quedrat:

$a^2=4b^2+c^2-4bc$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$b^2+c^2=4b^2+c^2-4bc$. Simplificant:

$3b^2-4bc=0$.

$3b^2-4\cdot 108=0$. Resolent l'equació:

$b=12$.

$12c=108$. Resolent l'equació:

$c=9$.

$a=2\cdot 12-9=15$.

Calculem l'altura sobre la hipotenusa del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\dfrac{15\cdot h}{2}=54$. Resolent l'equació:

$h=\dfrac{36}{5}$.