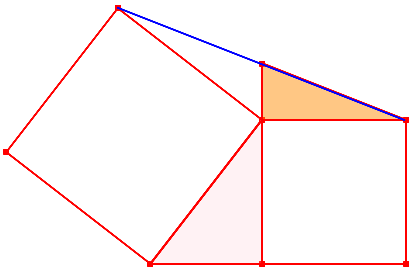
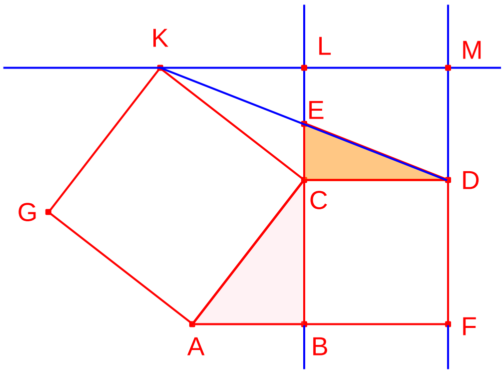
3091.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees ombrejades dels dos triangles rectangles.



Solució:



Siguen el triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDE}$

Siga $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$

Pel vèrtex K del quadrat $ACKG$ sobre la hipotenusa dibuixem una perpendicular al costa $\overline{BC}$ que talla les rectes BC, DF en els punts L, M respectivament.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLC}$ són iguals.

$\overline{KL} = a, \overline{CL} = c$

$\overline{LM} = a, \overline{DM} = c$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KLE}, \overset{\Delta}{KMD}$ són semblants i de raó $1:2$.

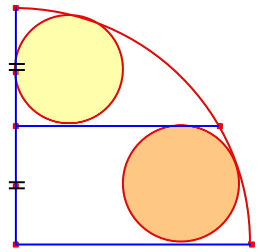
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{LE} = \frac{1}{2}c$$

La proporció d'àrees és:

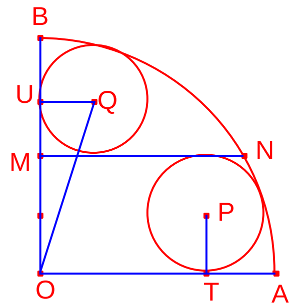
$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}a \cdot c} = \frac{1}{2}$$

3092.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos cercles i l’àrea del quadrant.



Solució:

Els radis dels dos cercles són distints.
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = R$
Siga M el punt mig del segment $\overline{OB}$
Siga la circumferència de centre P tangent al quadrant i al radi $\overline{OA}$
El radi és $r = \frac{1}{4}R$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QU} = s$



$$\overline{OU} = \frac{1}{2}R + s, \overline{OQ} = R - s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OUQ}$:

$$(R-s)^2 = s^2 + \left(\frac{1}{2}R + s\right)^2$$

Simplificant:

$$4s^2 + 3Rs - 3R^2 = 0$$

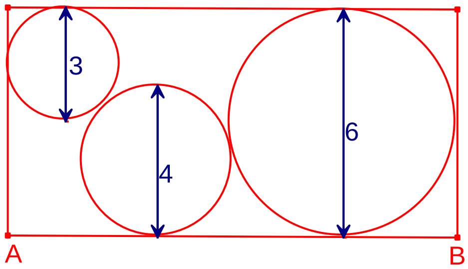
Resolent l’equació:

$$s = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2}R$$

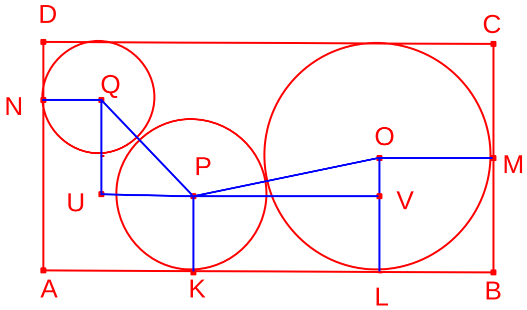
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\pi r^2 + \pi s^2}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{\frac{1}{16}R^2 + \left(\frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2}R\right)^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{85 - 48\sqrt{3}}{4} \approx 0.4654$$

3093.- En un rectangle s’ha dibuixat tres circumferències tangents de diàmetres 6, 4, 3. Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$



Solució:



Siga el rectangle $ABCD, \overline{BC} = 6$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OM} = 3$.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = 2$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QN} = \frac{3}{2}$
Siga V la projecció de P sobre OL.
Siga U la projecció de Q sobre PV
Siguen $\overline{PU} = a, \overline{PV} = b$

$$\overline{PQ} = \frac{7}{2}, \overline{QU} = \frac{5}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QUP}$:

$$a^2 = \frac{49}{4} - \frac{25}{4}$$
$$a = \sqrt{6}$$

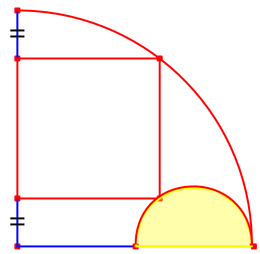
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PVO}$:

$$b^2 = 25 - 1 = 24$$
$$b = 2\sqrt{6}$$

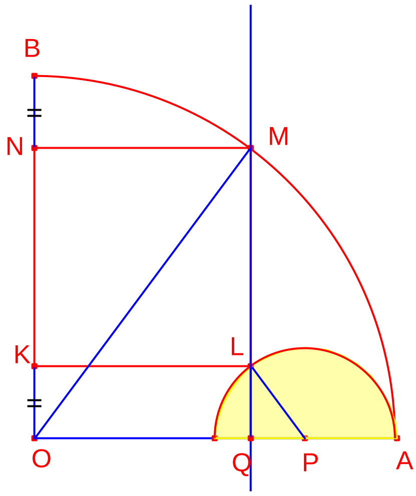
La mesura del costat $\overline{AB}$ és:

$$\overline{AB} = \overline{NQ} + a + b + \overline{OM} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{6}$$

3094.- En un quadrant s'ha dibuixat un quadrat i un semicercle.
Calculeu la proporció entre les àrees del semicercle i del quadrant.

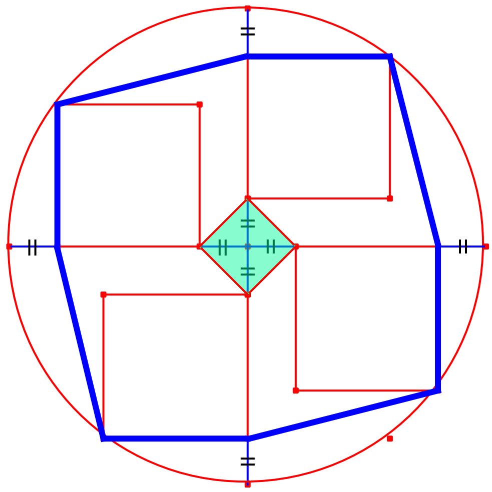


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\overline{OK} = \overline{BN} = a$
$R = 2a + c$

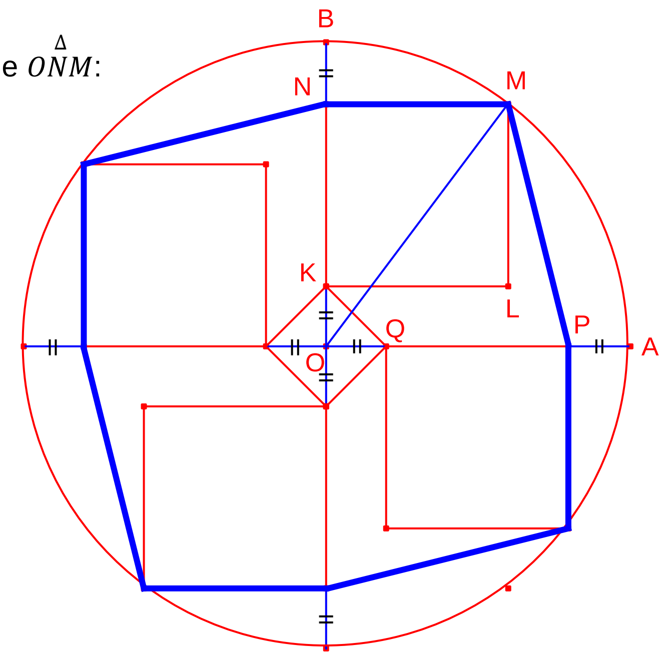


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONM}$:
$(2a + c)^2 = (a + c)^2 + c^2$
Simplificant:
$3a^2 + 2ca - c^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{1}{3}c$$
$$\overline{OA} = \frac{5}{3}c$$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PA} = \overline{PL} = r$
Siga Q la projecció de L sobre el radi $\overline{OA}$
$$\overline{PQ} = \frac{2}{3}c - r, \overline{LQ} = a = \frac{1}{3}c$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQL}$:
$$r^2 = \left(\frac{2}{3}c - r\right)^2 + \left(\frac{1}{3}c\right)^2$$
Simplificant:
$5c^2 = 12rc$
$$r = \frac{5}{12}c$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{semicercle}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi\left(\frac{5}{3}c\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{25}{144}}{\frac{1}{4}\frac{25}{9}} = \frac{1}{8}$$

3095.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees del quadrat ombrejat i l'octògon.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\overline{OK} = \overline{BN} = a$
$R = 2a + c$

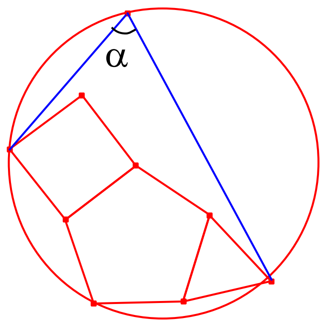


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONM}$:
$(2a + c)^2 = (a + c)^2 + c^2$
Simplificant:
$3a^2 + 2ca - c^2 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{3}c$

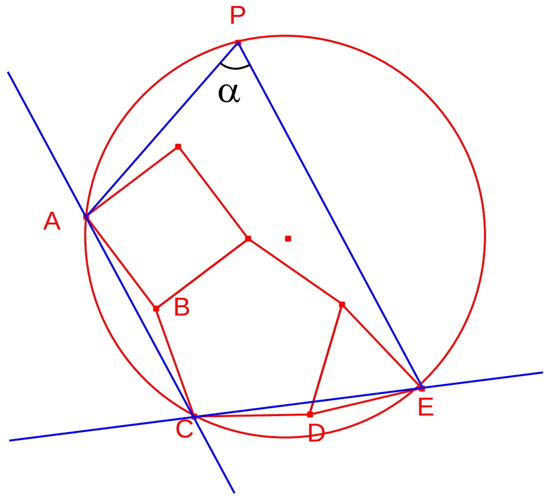
La proporció de les àrees és igual a la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{OQK}$ i del trapezi OPMN.

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OPMN}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}(2c + a)(a + c)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{9}c^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}c\right) \cdot \left(\frac{4}{3}c\right)} = \frac{1}{28}$$

3096.- Donats el pentàgon, el quadrat i el triangle equilàter s'ha dibuixat la circumferència que passa per tres vèrtexs.
Calculeu la mesura de l'angle α



Solució:
Siga $\alpha = \angle APE$

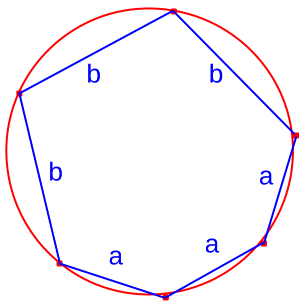


El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
$\angle ABC = 360° - (108° + 90°) = 162°$
$\angle BAC = \frac{1}{2}(180° - 162°) = 9°$

El triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és isòsceles.
$\angle CDE = 108° + 60° = 168°$
$\angle ECD = \frac{1}{2}(180° - 168°) = 6°$

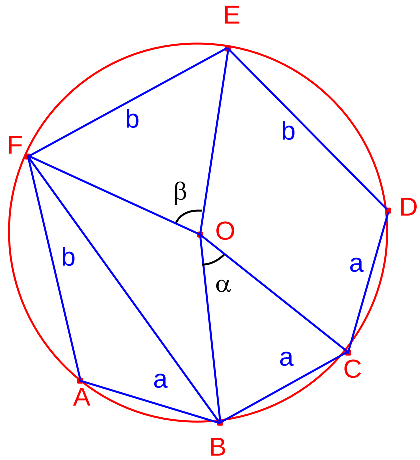
$\angle ACD = \angle BAC + \angle BCD - \angle ECD = 9° + 108° - 6°$
$= 111°$
El quadrilàter $ACEP$ està inscrit en la circumferència. Els angles oposats són suplementaris.
$\alpha = \angle APE = 180° - 111° = 69°$

3097.- L'hexàgon de la figura està inscrit en la circumferència.
Calculeu el radi de la circumferència en funció dels valors a, b



Solució:

Siga la circumferència de centre O i radi R.
Siga l'hexàgon $ABCDEF$ de costats $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a, \overline{AF} = \overline{FE} = \overline{ED} = b$
Siguen $\angle BOC = \alpha, \angle EOF = \beta$
$3\alpha + 3\beta = 360°$
Simplificant:
$\alpha + \beta = 120°$



$$\angle FAB = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) = 120°$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{BF}^2 = a^2 + b^2 + ab$

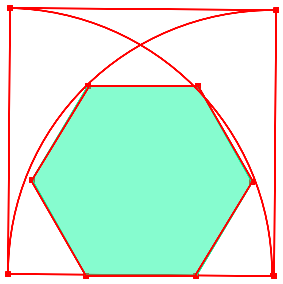
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$\frac{\overline{BF}}{\sin 120°} = 2R$$

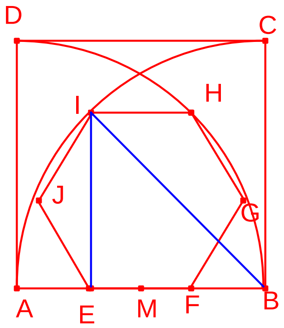
$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}$$

3098.- En un quadrat s'han dibuixat dos quadrats i un hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon regular i l'àrea del quadrat.

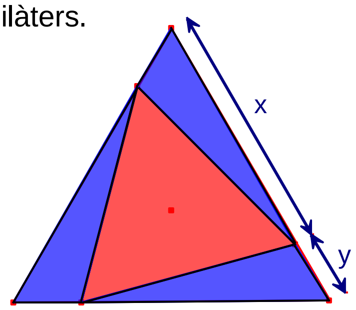


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga l'hexàgon regular $EDFGHIJ$ de costat $\overline{EF} = x$
$\overline{EI} = x\sqrt{3}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{BI} = c, \overline{BE} = \overline{EM} + \overline{BM} = \frac{1}{2}(x + c)$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IEB}$:
$c^2 = 3x^2 + \left(\frac{1}{2}(x + c)\right)^2$
Simplificant:
$13x^2 + 2cx - 3c^2 = 0$
Resolent l'equació:
$x = \frac{-1 + 2\sqrt{10}}{13}c$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{EFGHIJ}}{S_{ABCD}} = \frac{6\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{c^2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{41 - 4\sqrt{10}}{169} = \frac{3\left(41\sqrt{3} - 4\sqrt{30}\right)}{338} \approx 0.4358$$

3099.- En la figura, el triangle exterior i el interior roig són equilàters.
La zona blava i la zona roja tenen la mateixa àrea.
Calculeu la proporció $x : y$

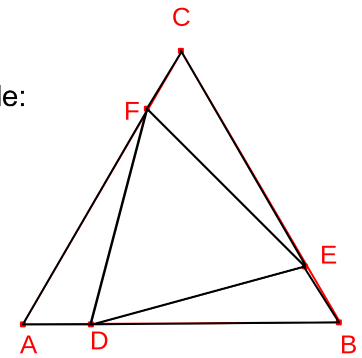


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ tal que la seua àrea és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$\overline{BD} = \overline{AF} = \overline{CE} = x, \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = y = c - x$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DBE}$ és la sisena part de l'àrea del triangle:

$$S_{DBE} = \frac{1}{2}x(c-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

$$6 \cdot \frac{1}{2}x(c-x)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Simplificant:

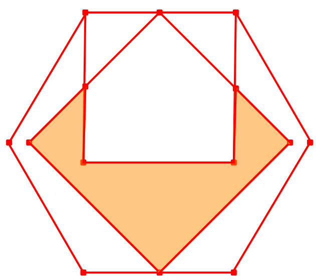
$$6x^2 - 6cx + c^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}c, y = \frac{3-\sqrt{3}}{6}c$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

3100.- En un hexàgon regular s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees la zona ombrejada i l'àrea de l'hexàgon.



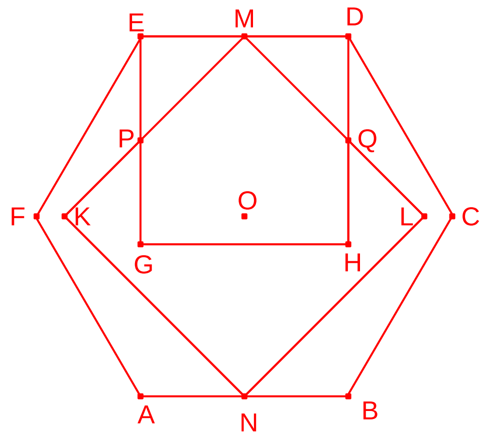
Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$

Siga el quadrat $DEGH$.

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{DE}$, respectivament.

Siga el quadrat $MKNL$



$\overline{MN} = \overline{KL} = c\sqrt{3}$

$\overline{FC} = 2c$

$\overline{FK} = \frac{1}{2}(2c - c\sqrt{3}) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c$

L'àrea del trapezi $FKME$ és:

$$S_{FKEM} = \frac{1}{2}(\overline{FK} + \overline{EM})\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}c + \frac{1}{2}c\right)\frac{\sqrt{3}}{2}c = \\ = \frac{3}{8}(\sqrt{3}-1)c^2$$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{MEP}$ és:

$$S_{MEP} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = \frac{1}{8}c^2$$

L'àrea del polígon $MPGHQ$ és igual a l'àrea del quadrat $DEGH$ menys dues vegades l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{MEP}$:

$$S_{MPGHQ} = c^2 - 2 \cdot \frac{1}{8}c^2 = \frac{3}{4}c^2$$

L'àrea ombrejada $PKNLQHG$ és:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCDEF} - 4 \cdot S_{FKME} - S_{MPGHQ}$$

$$S_{ombrejada} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - 4\left(\frac{3}{8}(\sqrt{3}-1)c^2\right) - \frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4}c^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEFF}} = \frac{\frac{3}{4}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$$