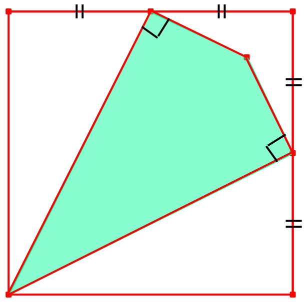
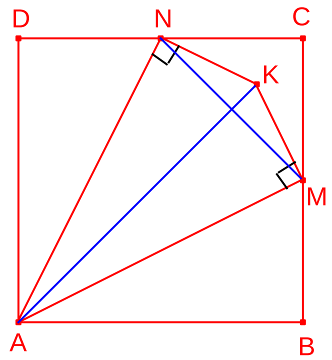
3101.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.
El quadrilàter $AMKN$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$



$$\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Siga $\overline{KM} = \overline{KN} = x$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMK}$

$$\overline{AK} = \sqrt{\frac{5}{4}c^2 + x^2}$$

Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NCM}$

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible $AMKN$:

$$\overline{AM} \cdot \overline{KN} + \overline{AN} \cdot \overline{KM} = \overline{AK} \cdot \overline{MN}$$

$$2x\frac{\sqrt{5}}{2}c = \sqrt{\frac{5}{4}c^2 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Simplificant:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{6}c$$

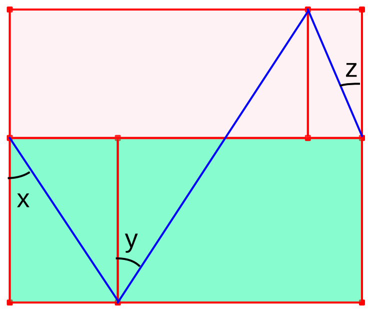
L'àrea ombrejada és:

$$S_{AMKN} = \overline{AM} \cdot x = \frac{\sqrt{5}}{2}c \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}c = \frac{5}{12}c^2$$

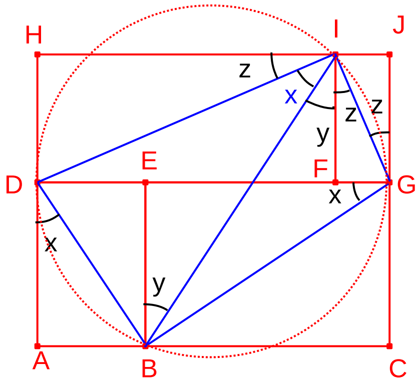
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{AMKN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{12}c^2}{c^2} = \frac{5}{12}$$

3102.- Cada parell de rectangles del mateix color són semblants.
Calculeu la suma dels angles $x+y+z$



Solució:



Siguen els rectangles $ABED, BEGC$ semblants.
Aleshores:
$\angle DGB = x$
Aleshores, $\angle DBG = 90°$

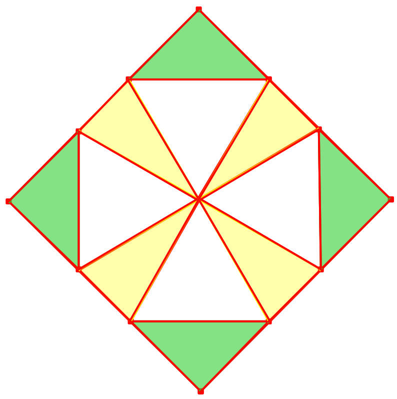
Siguen els rectangles $DFIH, IFGJ$ semblants.
Aleshores:
$\angle HID = z$
Aleshores, $\angle DIG = 90°$
Per tant el rectangle $BGID$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.

Per ser angles entre paral·leles, $\angle BIF = \angle EBI = y$

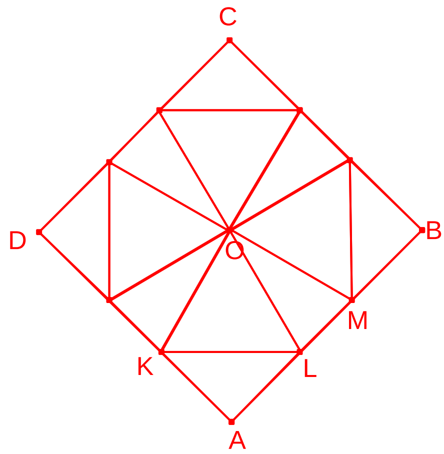
Per ser angles inscrits i abraçar el mateix arc:
$\angle DIB = \angle DGB = x$

Aleshores:
$x+y+z=90°$

3103.- Els triangles blanc de la figura són equilàters. i tenen un vèrtex comú en el centre del quadrat exterior Calculeu la raó de les àrees groga i verda de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLO}$ de costat $\overline{KL} = c$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KAL}$ és:

$$S_{KAL} = \frac{1}{4}c^2$$

$$\angle LOM = 30°$$

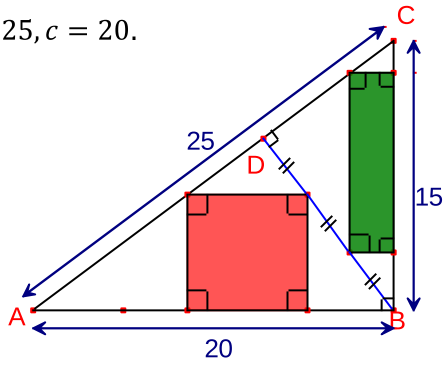
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{LOM}$ és:

$$S_{LOM} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{4}c^2$$

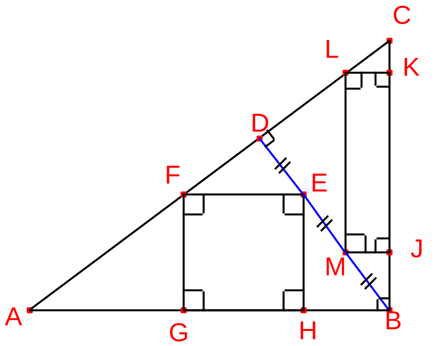
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{S_{LOM}}{S_{KAL}} = 1$$

3104.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, a = 15, b = 25, c = 20$.
L'altura $\overline{BD}$ s'ha dividit en tres parts iguals.
Determineu la proporció entre l'àrea roja i l'àrea verda.



Solució:
Siga el rectangle $JKLM$ de costats $\overline{MJ} = a, \overline{JK} = b$
Siga el rectangle $EFGH$ de costats $\overline{EF} = c, \overline{FG} = d$



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 20 \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \overline{BD}$$

Resolent l'equació:

$\overline{BD} = 12$

$\overline{DE} = \overline{BM} = 4$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BJM}$ són semblants i de raó $25: 4$
Aplicant el teorema de Tales:

$$a = \frac{12}{5}, \overline{BJ} = \frac{16}{5}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{LKC}$ són semblants i de raó $25: 3$

$$\overline{CK} = \frac{9}{5}$$

$$b = 15 - (\overline{BJ} + \overline{CK}) = 10$$

L'àrea verda és:

$$S_{KLMN} = ab = \frac{12}{5} \cdot 10 = 24$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{FDE}$ són semblants i de raó $12: 4$

$$c = \frac{20}{3}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EHB}$ són semblants i de raó $25: 8$

$$d = \frac{32}{5}$$

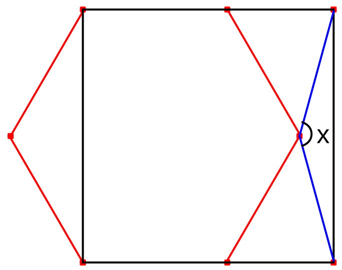
L'àrea roja és:

$$S_{EFGH} = cd = \frac{20}{3} \cdot \frac{32}{5} = \frac{128}{3}$$

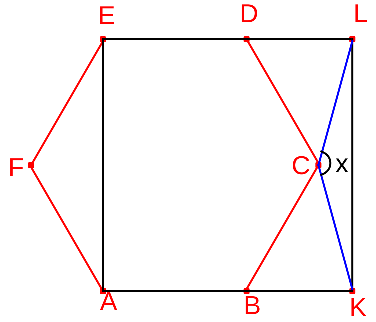
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{KLMN}} = \frac{\frac{128}{3}}{24} = \frac{16}{9}$$

3105.- En la figura, hi ha dibuixats un hexàgon regular i un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x

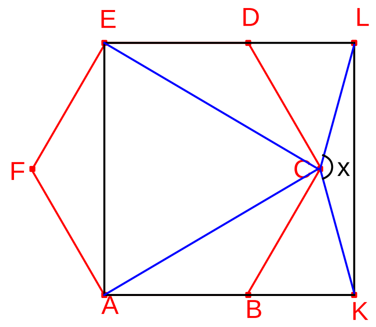


Solució 1:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AE} = c\sqrt{3}$
Siga el quadrat $AKLE$.
$\overline{DL} = (\sqrt{3} - 1)c$



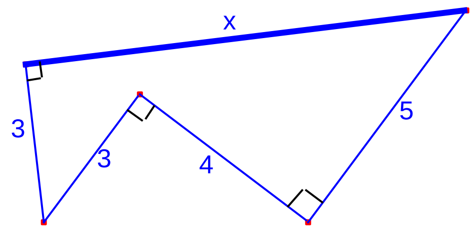
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CLD}$
$\overline{CL}^2 = c^2 + \left((\sqrt{3} - 1)c\right)^2 - 2c(\sqrt{3} - 1)c \cdot \cos 60°$
$\overline{CL}^2 = (6 - 3\sqrt{3})c^2$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CKL}$
$3c^2 = (6 - 3\sqrt{3})c^2 + (6 - 3\sqrt{3})c^2 - 2(6 - 3\sqrt{3})c^2 \cdot \cos x$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$x = 150°$

Solució 2:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $AKLE$
$\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{EC}$



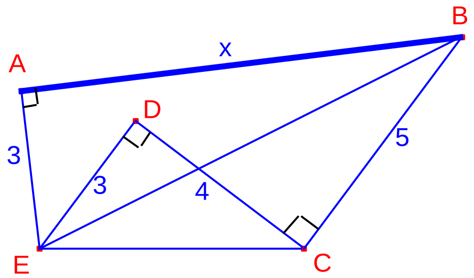
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és equilàter.
$\angle CAK = 30°$
$\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{AK}$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACK}$ és isòsceles.
$\angle ACK = \angle AKC = 75°$
$x = 360° - (2 \cdot 75° + 60°) = 150°$

3106.- En la figura, calculeu la mesura del segment x



Solució:
Siga $\overline{AB} = x$

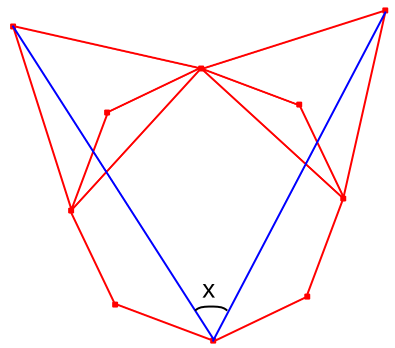
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDC}$:
$\overline{CE} = 5$
Siga $\alpha = \angle ECD$
$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$
$\overline{BE}^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos(90° + \alpha)$
$\overline{BE}^2 = 50 + 50\sin\alpha$
$\overline{BE}^2 = 50 + 50 \cdot \dfrac{3}{5} = 80$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EAB}$:
$x^2 = 80 - 3^2 = 71$
$x = \sqrt{71}$

3107.- La figura té un octògon regular i dos triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ i els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CEJ}, \overset{\Delta}{GEK}$

$\angle GEC = \angle EGA = 90°$

$\angle KGA = \angle KEJ = 150°$

Els triangles $\overset{\Delta}{KGA}, \overset{\Delta}{KEJ}$ són iguals (CAC)

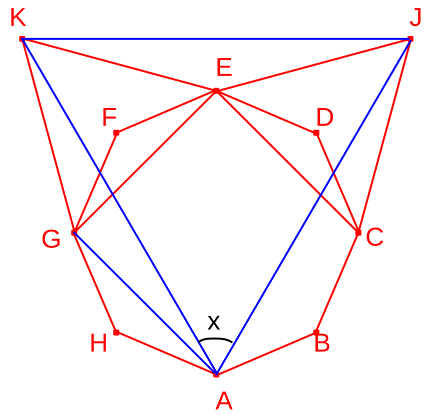
Aleshores, $\overline{KA} = \overline{KJ}$

$\angle AKJ = 60°$

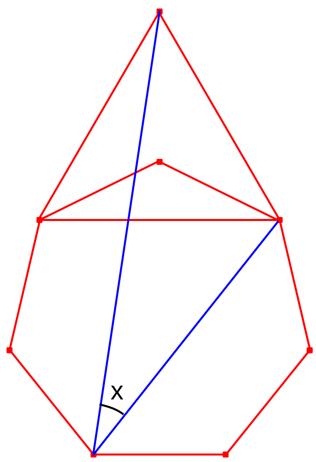
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KAJ}$ és equilàter.

Aleshores:

$x = \angle KAJ = 60°$



3108.- La figura té un heptàgon regular un triangle equilàter. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga l'heptàgon regular $ABCDEFG$ i el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DKF}$

$\angle DFA = \dfrac{180°}{7} \cdot 3$

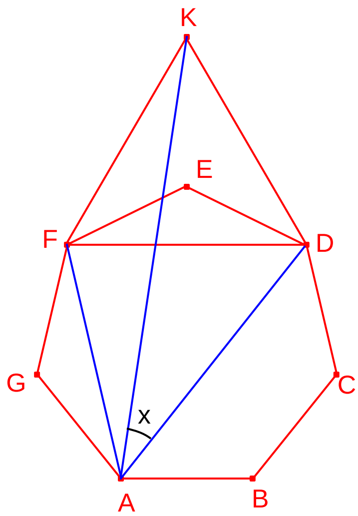
$\angle KFA = 60° + \dfrac{180°}{7} \cdot 3$

El triangle $\overset{\Delta}{KFA}$ és isòsceles.

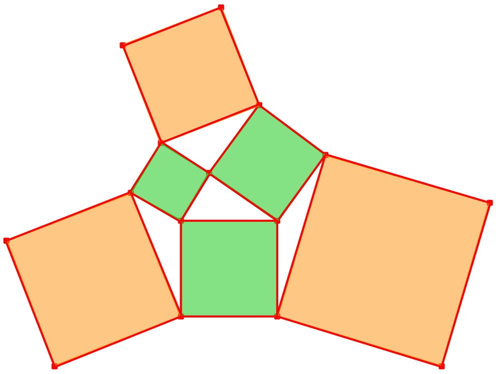
$\angle FAK = \dfrac{180° - \left(60° + \dfrac{180°}{7} \cdot 3\right)}{2} = \dfrac{180°}{7} \cdot 2 - 30°$

$\angle FAD = \dfrac{180°}{7} \cdot 2$

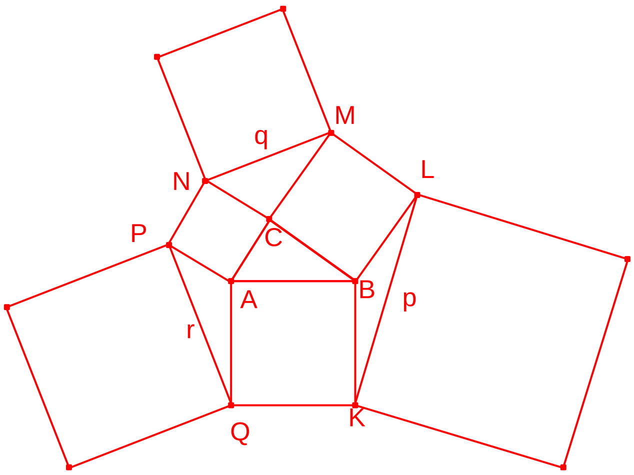
$x = \angle KAD = \angle FAD - \angle FAK = 30°$



3109.- Sobre els costats d'un triangle s'han dibuixat tres quadrats (verds) i amb dos vèrtexs dels quadrats s'han dibuixat altres tres quadrats (grocs)
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats grocs i la suma de les àrees del quadrats verds.



Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{BC} = a, \overline{Ac} = b, \overline{AB} = c$
La suma de les àrees dels quadrats verds és:
$S_{verd} = a^2 + b^2 + c^2$
Siguen $\overline{KL} = p, \overline{MN} = q, \overline{PQ} = r$ costats dels quadrats grocs.
Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KBL}$:
$p^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(180° - B) = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos B$
Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

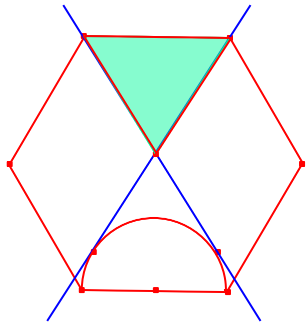
$$\cos B = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2av}$$

$$p^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(180° - B) = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2av} = 2a^2 + 2c^2 - b^2$$

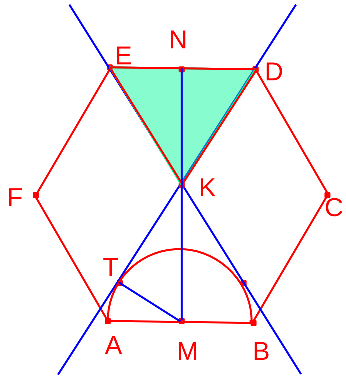
Anàlogament:
$q^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$
$r^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$
La suma de les àrees dels quadrats grocs és:
$S_{groc} = p^2 + q^2 + r^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{groc}}{S_{verd}} = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 3$$

3110.- Sobre un costat d'un hexàgon regular s'ha dibuixar una semicircumferència i dues rectes tangents a la semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea de l'hexàgon.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{DE}$, respectivament.
$\overline{MN} = c\sqrt{3}$
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEK}$ de costats iguals $\overline{DK} = \overline{EK} = a$
Siga T el punt de tangència de la recta DK i la semicircumferències.



$\overline{MT} = \overline{EN} = \frac{1}{2}c$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ENK}, \overset{\Delta}{MTK}$ són iguals.
$\overline{MK} = \overline{EK} = a$
$\overline{NK} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2}$
$c\sqrt{3} = a + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2}$
Resolent l'equació:
$a = \frac{13\sqrt{3}}{24}c$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEK}$ és:
$S_{DEK} = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}c^2} = \frac{11\sqrt{3}}{48}c^2$
L'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ és:
$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{DEK}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{11\sqrt{3}}{48}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{11}{72}$$