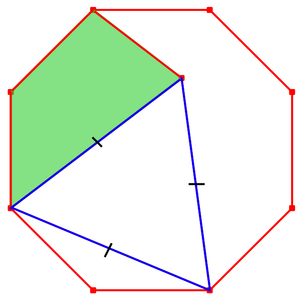
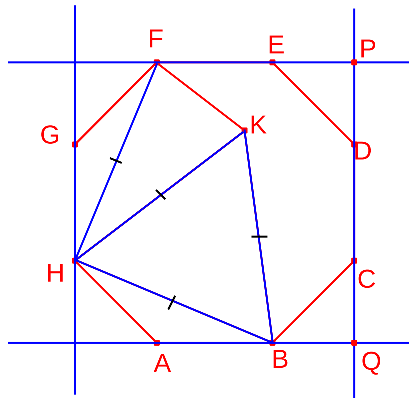
3111.- En un octògon regular s'ha dibuixar un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i la de l'octògon.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$



$\overline{PD} = \frac{\sqrt{2}}{3}c$

$\overline{PQ} = (1+\sqrt{2})c$

L'àrea de l'octògon regular és:

$S_{ABCDEFGH} = \left((1+\sqrt{2})c\right)^2 - c^2 = (2+2\sqrt{2})c^2$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BKH}$ de costat $\overline{BH} = a$

$\overline{HF} = \overline{BH} = a$

$\angle GHF = \angle GFH = \frac{180° - 135°}{2} = \frac{1}{2}45°$

$\angle FHK = 135° - \left(60° + 2 \cdot \frac{1}{2}45°\right) = 30°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FGH}$:

$a^2 = 2c^2 + 2c^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (2+\sqrt{2})c^2$

$S_{FGH} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{4}c^2$

$S_{FHK} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})c^2\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})c^2$

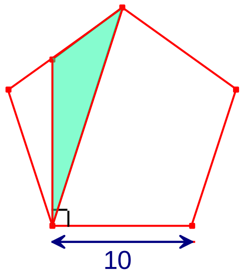
L'àrea de la zona ombrejada és $FGHK$ és:

$S_{FGHK} = S_{FGH} + S_{FHK} = \frac{\sqrt{2}}{4}c^2 + \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})c^2 = \frac{1}{4}(2+2\sqrt{2})c^2$

La proporció d'àrees és:

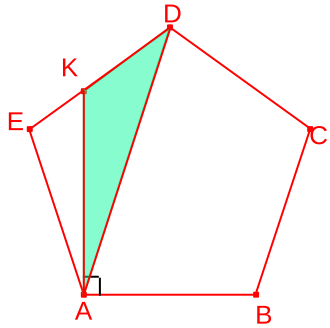
$$\frac{S_{FGHK}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{\frac{1}{4}(2+2\sqrt{2})c^2}{(2+2\sqrt{2})c^2} = \frac{1}{4}$$

3112.- En la figura, el pentàgon regular té costat 10. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat que té un costat perpendicular al costat del pentàgon.



Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 10$



$\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AB} = 10\Phi$

$\angle EAK = \angle EAB - \angle KAD = \angle EAD - 90° = 18°$

$\angle KAD = \angle EAK = 18°$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{EAD}$:

$\frac{\overline{KD}}{10\Phi} = \frac{10-\overline{KD}}{10} = \frac{10}{10(1+\Phi)}$

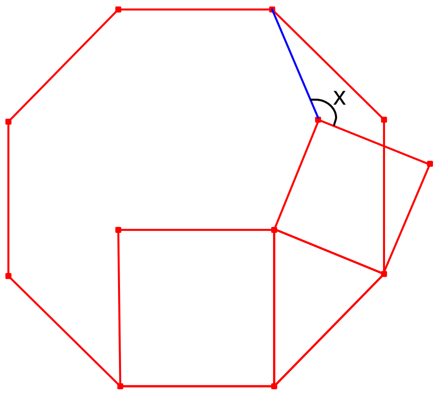
$\overline{KD} = 10\frac{\Phi}{1+\Phi} = 10\frac{1}{\Phi} = 10(\Phi - 1)$

L'àrea ombrejada és:

$S_{KAD} = \frac{1}{2} \cdot 10\Phi \cdot 10(\Phi - 1) \cdot \sin 36°$

$S_{KAD} = 50 \cdot \sin 36° = 50 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2} = 25\sqrt{3-\Phi} \cong 29.3893$

3113.- En un octògon regular s’han dibuixat dos quadrats.
Calculeu la mesura de l’angle x



Solució:
Siga l’octògon regular $ABCDEFGH$.
Siguen els quadrats $CJKL, ABLM$.

$\angle ABC = \angle BCD = 135°, \qquad \angle ECD = \angle CED = \frac{1}{2}45°$

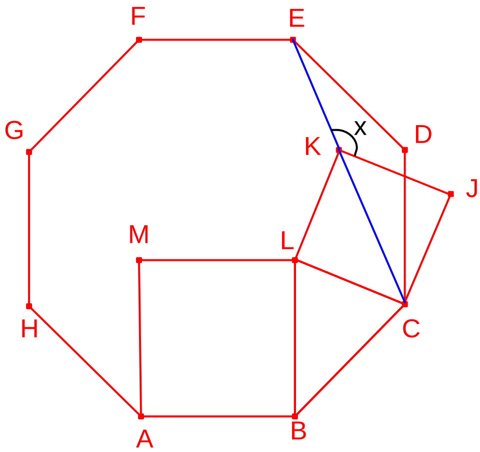
$\angle LBC = 135° - 90° = 45°$

$\angle BCL = \angle BLC = \frac{1}{2}135°$

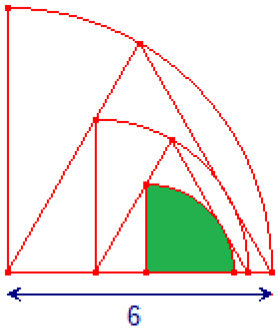
$\angle BCK = \frac{1}{2}135° + 45°$

$\angle KCD = 135° - \angle BCK = 135° - \left(\frac{1}{2}135° + 45°\right) = \frac{1}{2}45°$

Aleshores, K pertany a la diagonal $\overline{CE}$
$x = \angle EKJ = 180° - \angle CKJ = 135°$



3114.- En la figura hi ha tres quadrants i dos triangles equilàters.
El quadrant major té radi 6.
Calculeu l'àrea del quadrant menut.



Solució:

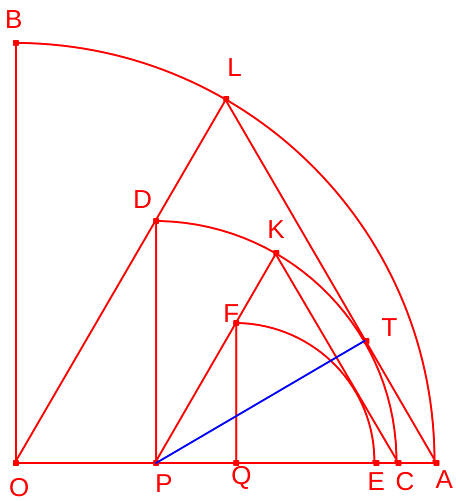
Siga el quadrant gran de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$
Sigaa el quadrant de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PD} = \overline{PT} = r$

$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$

$\overline{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$

$6 = r\sqrt{3}$

$r = 2\sqrt{3}$



Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QE} = \overline{QF} = s$
Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{OAL}, \overset{\Delta}{PCK}$ són semblants i de raó 6:r
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r}{6} = \frac{s}{r}$

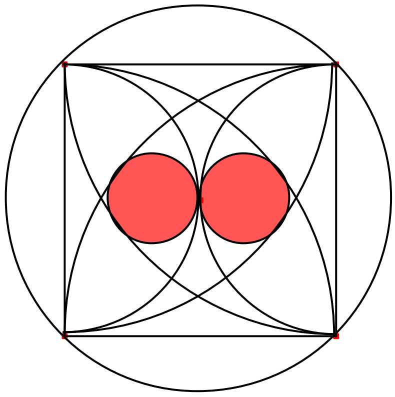
Aleshores:

$s = \frac{1}{6} \cdot r^2 = 2$

L'àrea del quadrant menut és:

$S = \frac{1}{4}\pi \cdot s^2 = \pi$

3115.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels cercles ombrejats i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
El radi de la circumferència exterior és:

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

Siga P el centre de la circumferència interior de radi $\overline{PO} = \overline{PT} = r$
Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$

$$\overline{AP} = c - r, \overline{PQ} = \frac{1}{2}c, \overline{AQ} = \frac{1}{2}c + r$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$:

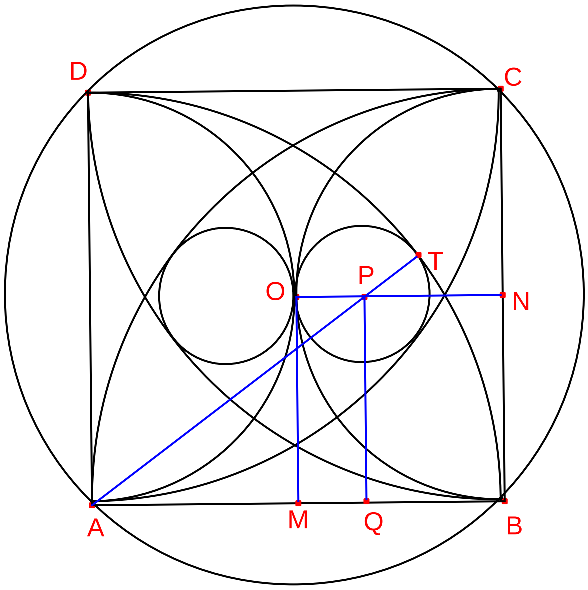
$$(c - r)^2 = \frac{1}{4}c^2 + \left(\frac{1}{2}c + r\right)^2$$

Resolent l'equació:

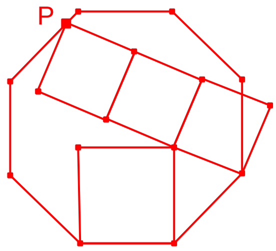
$$r = \frac{1}{6}c$$

La proporció de les àrees és:

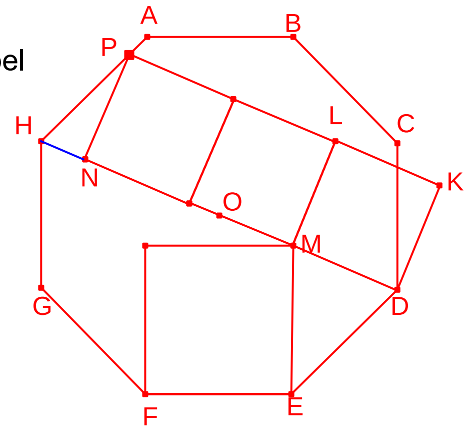
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2 \cdot (\pi \cdot s^2)}{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$



3116.- En la figura hi ha un octògon regular i quatre quadrats tres d'ells alineats i iguals.
Determineu si el punt P pertany al costat de l'octògon.

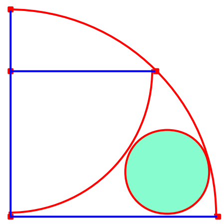


Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $DKLM$.
$\angle FED = \angle EDC = 135°$
$\angle MED = 135° - 90° = 45°$
$\angle EDM = \angle EMD = \frac{1}{2}135°$
Aleshores, la recta DM passa pel centre O de l'octògon i pel vèrtex H.

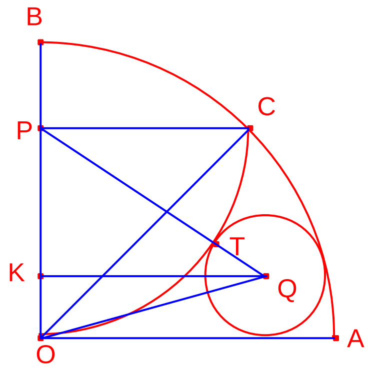


Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EDM}$:
$$\overline{DM}^2 = c^2 + c^2 - 2 \cdot c^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right)c^2$$
$$\overline{DM} = c\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$
$$\overline{DN} = 3 \cdot \overline{DM} = 3\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot c$$
Els triangles $\overset{\Delta}{EDM}, \overset{\Delta}{OAH}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{OH}}{c} = \frac{c}{c\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$
$$\overline{OH} = \frac{\left(2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \cdot c$$
$$\overline{DH} = \left(2 + \sqrt{2}\right)\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot c$$
$$\overline{HN} = \left(-1 + \sqrt{2}\right)\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot c$$
Siga $\angle PHN = \alpha$
$$\tan\alpha = \frac{\overline{PN}}{\overline{HN}} = \frac{c\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\left(-1 + \sqrt{2}\right)\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot c} = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{135°}{2}$$
Aleshores,
$$\alpha = \frac{135°}{2} = \angle AHD$$
Aleshores, el punt P pertany al costat $\overline{AH}$

3117.- Donats dos quadrants i un cercle tangent als dos quadrats.
Calculeu la proporció de l'àrea del cercle i l'àrea del quadrant gran.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = R$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PC} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
Siga K la projecció de Q sobre $\overline{OB}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPC}$:
$2r^2 = R^2$

$\overline{PK} = r - s, \overline{PQ} = r + s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$:
$\overline{KQ}^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = 4rs$

$\overline{OQ} = R - s, \overline{OK} = s$

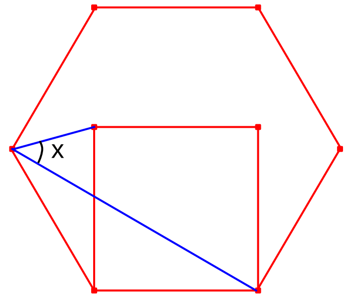
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$:
$\overline{KQ}^2 = (R-s)^2 - s^2$
Igualant ambdues expressions:
$R^2 - 2Rs = 4rs$

$$s = \frac{R^2}{4r + 2R} = \frac{R^2}{\left(2\sqrt{2} + 2\right)R} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}R$$

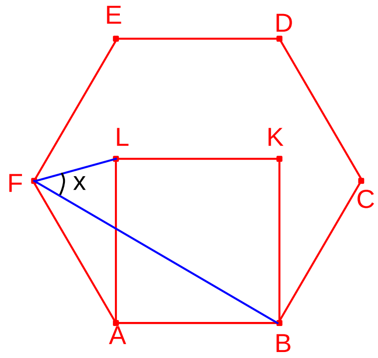
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{cercle}}{S_O} = \frac{\pi \cdot s^2}{\frac{1}{4}\pi \cdot R^2} = \frac{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{4}} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$$

3118.- Donat un hexàgon regular i un quadrat sobre un costat, calculeu la mesura de l'angle x

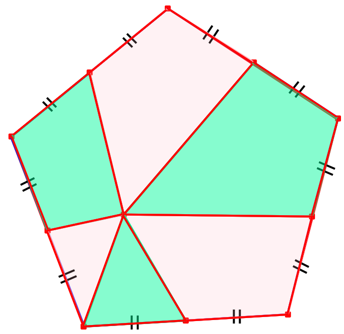


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDE$.
Siga el quadrat $ABKL$.
Siga $x = \angle LFB$

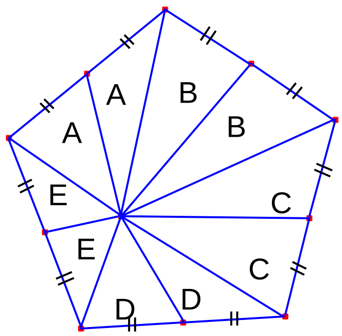


$\angle FAB = 120°$
$\angle FAL = 120° - 90° = 30°$
El triangle $\overset{\Delta}{FAL}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{AL}$
$$\angle LFA = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$
El triangle $\overset{\Delta}{FAB}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{AB}$
$$\angle AFB = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$$
$x = \angle LFB = \angle LFA - \angle AFB = 75° - 30° = 45°$

3119.- Els costats d'un pentàgon regular s'han dividit en parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea lila.

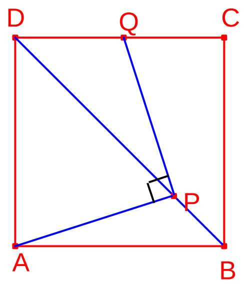


Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea



$S_{verda} = A + B + C + D$
$S_{lilaa} = A + B + C + D$
La proporció de les àrees és 1.

3120.- Siga un punt P de la diagonal $\overline{BD}$ del quadrat $ABCD$.
Siga Q un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{AP}$ i $\overline{PQ}$ són perpendiculars.
Calculeu la proporció entre els segments $\overline{AP}, \overline{PQ}$



Solució:
Siga $\angle PAB = \alpha$
$\angle DPQ = 45° - \alpha$
$\angle DQP = 90° - \alpha, \angle DAP = 90° - \alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DQP}$:

$$\frac{\overline{PD}}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 45°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADP}$:

$$\frac{\overline{PD}}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\overline{AP}}{\sin 45°}$$

Difidint ambdues expressions:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AP}} = 1$$