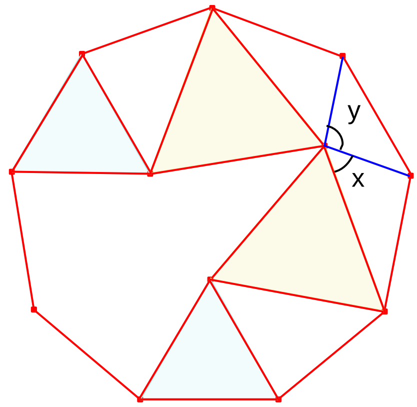
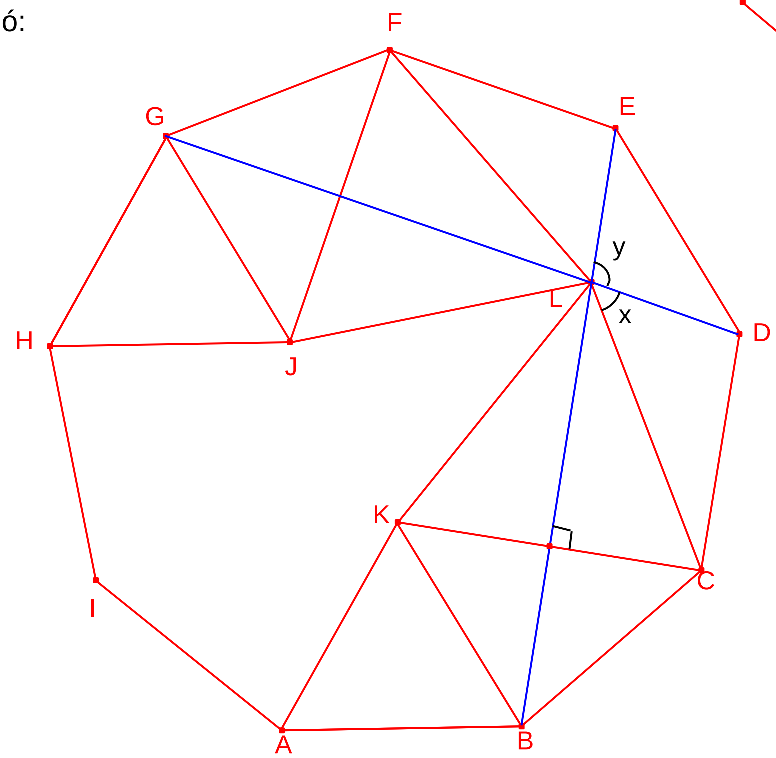
3121.- En un polígon regular de 9 costats s'han dibuixat quatre triangles equilàters.
Determineu la mesura dels angles x, y



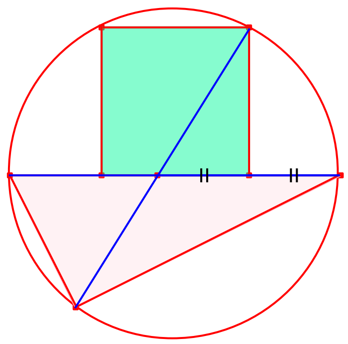
Solució:



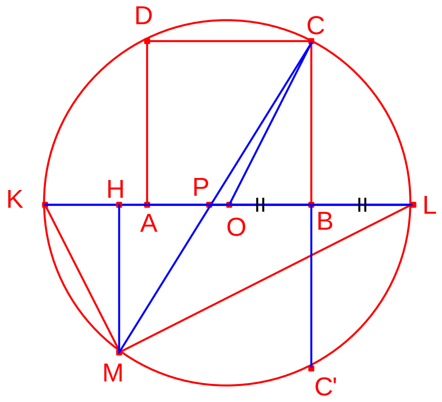
Siga l'enneàgon regular $ABCDEFGHI$.
$\angle ABC = 140°$

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{KCL}$
$\angle KBC = 140° - 60° = 80°$
El polígon $BCLK$ és un cometa, les diagonals són perpendiculars.
$\angle LBC = 40°$
$\angle EBC = 40°$
Aleshores, els punts A, L, E estan alineats.
$\angle LED = 40°, \overline{LD} = \overline{LE}$
Aleshores:
$y = \angle ELD = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$
$x = \angle CLD = 180° - (30° + 100°) = 50°$

3122.- Sobre un diàmetre d'una circumferència s'ha dibuixat un quadrat i un triangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea del triangle.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{KL} = 2R$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga P el punt del diàmetre $\overline{KL}$ tal que $\overline{BL} = \overline{BP} = a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$$R^2 = c^2 + \frac{1}{4}c^2$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = c^2 = \frac{4}{5}R^2$$

La recta BC talla la circumferència en el punt C', $\overline{BC} = \overline{BC'} = c$
Aplicant la potència del punt B respecte de la circumferència:

$$a(2R - a) = c^2$$

$$a^2 - 2Ra + \frac{4}{5}R^2$$

Resolent l'equació:

$$a = \frac{5 - \sqrt{5}}{5}R$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBC}$:

$$\overline{CP} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{5}R\right)^2 + \frac{4}{5}R^2} = \frac{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5}R$$

Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:

$$\overline{PM} \cdot \overline{PC} = 2a(2R - 2a) = 4(aR - a^2) = 4\frac{-1 + \sqrt{5}}{5}R^2$$

$$\overline{PM} = \frac{4\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}$$

Siga H la projecció de M sobre el diàmetre $\overline{KL}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PBC}, \overset{\Delta}{PHM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

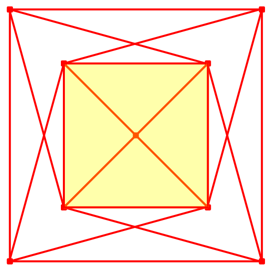
$$\frac{\overline{MH}}{c} = \frac{\overline{PM}}{\overline{CP}} = \frac{2\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{5 - \sqrt{5}}$$

$$\overline{MH} = R\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot\cdot \frac{2\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{5 - \sqrt{5}} = \frac{4}{5}R$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{4}{5}R = \frac{4}{5}R^2 = S_{ABCD}$$

3123.- En un quadrat s'han dibuixat quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{FCH}$ de costat $\overline{CF} = \overline{FH} = x$
$\angle BCG = 15°, \angle CBF = 45°$
Aleshores, $\angle CFB = 120°$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCF}$:

$$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 120°}$$

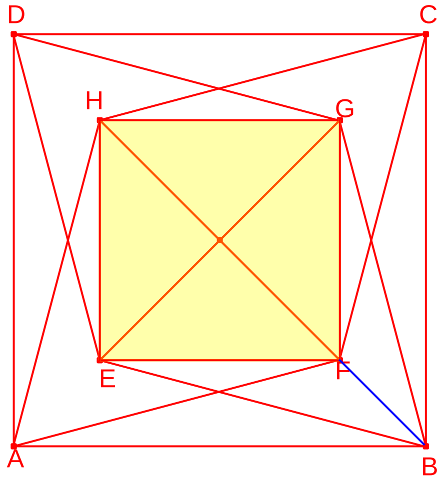
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3} c$$

Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2} x$
L'àrea del quadrat $EFGH$ és:

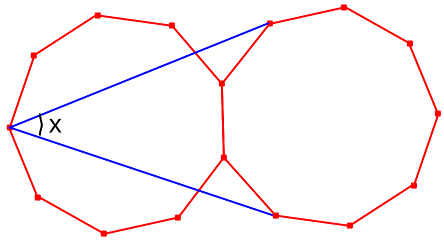
$$S_{EFGH} = \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3} c^2 = \frac{1}{3} c^2$$

La proporció de les àrees és:

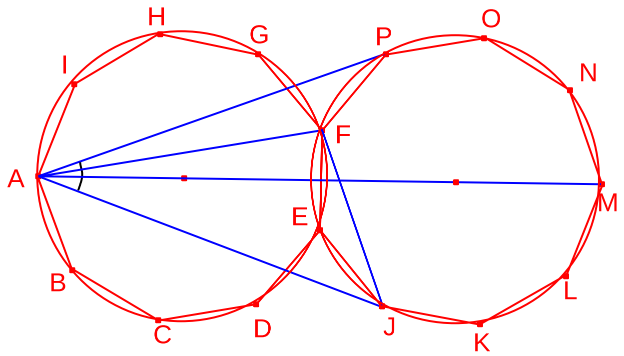
$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} c^2}{c^2} = \frac{1}{3}$$



3124.- Dos polígons regulars de 9 costats tenen un costat comú.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siguen els polígons regulars $ABCDEFGHI, EFJKLMNOP$ de radi R
Siga $\angle PAJ = x$
$\angle FAE = 20°$

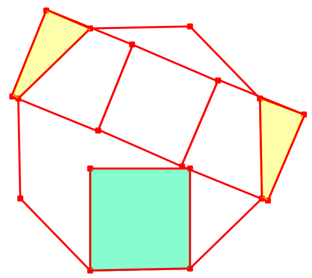


$\overline{FP} = c = 2R \cdot \sin 20°$
$\overline{FJ} = 2R \cdot \sin 40°$
$\angle AFJ = 100°, \angle AFP = 140°$
$\angle FAJ = \dfrac{x}{2} + 10°, \angle PAF = \dfrac{x}{2} - 10°$

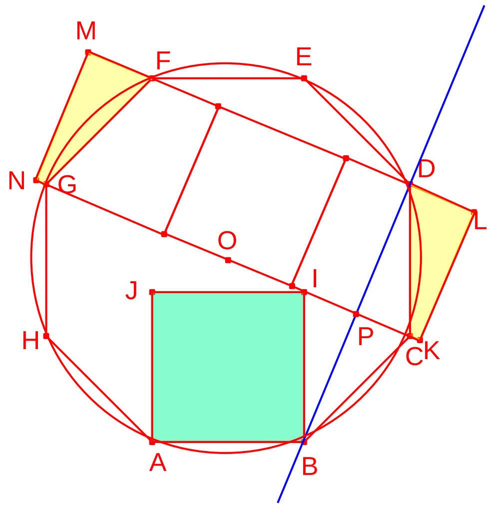
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFJ}$:
$$\frac{2R \cdot \sin 40°}{\sin\left(\frac{x}{2} + 10°\right)} = \frac{\overline{AJ}}{\sin 100°}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AFP}$:
$$\frac{2R \cdot \sin 20°}{\sin\left(\frac{x}{2} - 10°\right)} = \frac{\overline{AP}}{\sin 140°}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\sin 40° \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - 10°\right)}{\sin 20° \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + 10°\right)} = \frac{\sin 40°}{\sin 80°}$$

$$\sin 80° \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - 10°\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 10°\right) \cdot \sin 20°$$
$$\cos\left(90° - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + 70°\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - 10°\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + 30°\right)$$
$$\cos\left(90° - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - 10°\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + 70°\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + 30°\right)$$
$$\sin 40° \cdot \sin\left(-\frac{x}{2} + 50°\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 50°\right) \cdot \sin 20°$$
$$2 \cdot \cos 20° \cdot \sin\left(-\frac{x}{2} + 50°\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 50°\right)$$
$$\sin\left(-\frac{x}{2} + 30°\right) + \sin\left(-\frac{x}{2} + 70\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 50°\right)$$
$$\sin\left(-\frac{x}{2} + 30°\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 50°\right) - \sin\left(-\frac{x}{2} + 70°\right)$$
$$\sin\left(-\frac{x}{2} + 30°\right) = 2 \cdot \cos 60° \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - 10°\right)$$
$$\sin\left(-\frac{x}{2} + 30°\right) = \sin\left(\frac{x}{2} - 10°\right)$$
$$-\frac{x}{2} + 30° = \frac{x}{2} - 10°$$
$$x = 40°$$

3125.- Sobre el costat d'un octògon regular s'ha dibuixat un quadrat.
Altres tres quadrats iguals pertanyen a dues diagonal.
Calculeu la proporció entre les àrees de la zona groga i el quadrat.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDDEFGH$ de centre O de costat $\overline{AB} = c$ i radi de la circumferència circumscrita $\overline{OE} = R$



$$\frac{c}{\sin\frac{45°}{2}} = 2R$$

Les diagonals $\overline{CN}, \overline{BD}$ són perpendiculars.
Siga P la intersecció de les dues diagonals.
Siga $\overline{KL} = \overline{DP} = d$ costat dels tres quadrats iguals.

$$\overline{DF} = \overline{BD} = 2d$$

$$\frac{2d}{\sin 135°} = 2R$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$

$$\overline{KL} = 3d = \frac{3\sqrt{2}}{2}R$$

L'àrea del rectangle $KLMN$ és:

$$S_{KDMN} = 3d^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}R^2 = \frac{3}{2}R^2$$

L'àrea del trapezi $KDFN$ és:

$$S_{KDFN} = \frac{1}{2}\left(2R + R\sqrt{2}\right)d = \frac{1+\sqrt{2}}{3}R^2$$

L'àrea groga és igual a l'àrea del rectangle $KLMN$ menys l'àrea del trapezi $KDFN$:

$$S_{groga} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)R^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R^2$$

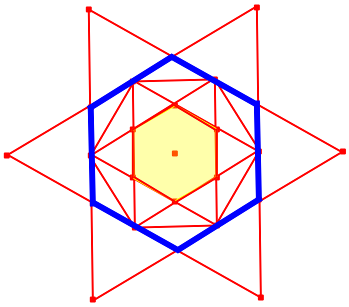
L'àrea del quadrat $ABIJ$ és:

$$S_{ABIJ} = c^2 = 4R^2 \cdot \sin^2\frac{45°}{2} = 4R^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \left(2-\sqrt{2}\right)R^2$$

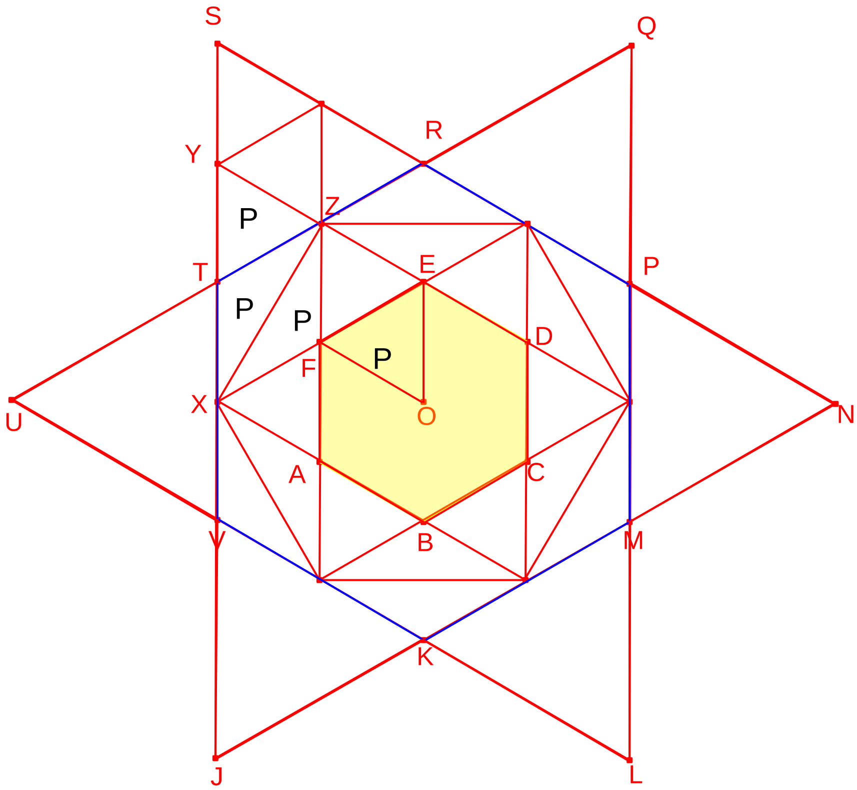
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{KDFN}}{S_{ABIJ}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}R^2}{\left(2-\sqrt{2}\right)R^2} = \frac{1}{2}$$

3126.- Sobre els costats de l'hexàgon regular blau s'han dibuixat 6 triangles equilàters.
Determineu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon groc i l'àrea total de la figura.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AEF}$ d'àrea $S_{AEF} = P$

$S_{XFZ} = S_{XTZ} = S_{TZY} = P$

L'àrea de l'hexàgon $ABCDEF$ és:

$S_{ABCDEF} = 6P$

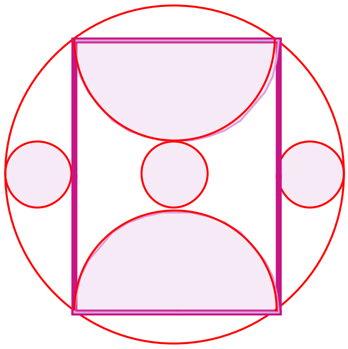
L'àrea total de la figura és:

$S_{total} = 6 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 = 48$

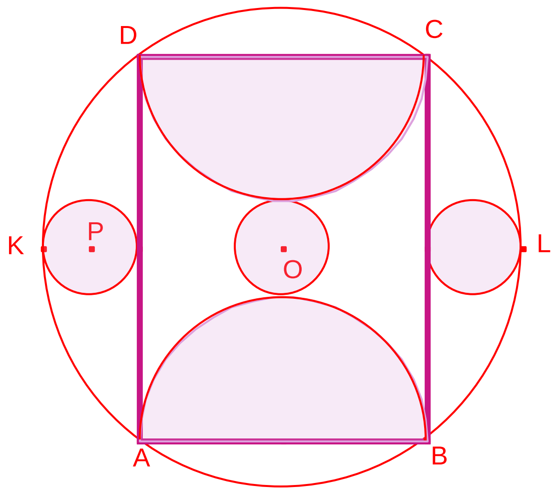
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{toal}} = \frac{1}{8}$$

3127.- Els tres cercles menuts són iguals. Determineu la proporció entre l0àrea ombrejada i l’àrea del cercle exterior.



Solució:

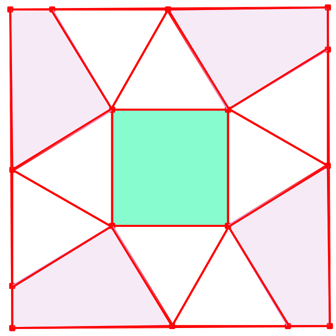


Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = r$
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$
$2R = 4r + a$
$b = a + 2r$

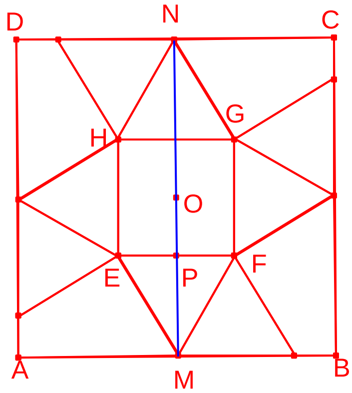
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$(4r + a)^2 = a^2 + (a + 2r)^2$
Simplificant:
$a^2 - 4ra - 12r^2 = 0$
Resolent l’equació:
$a = 6r$
Aleshores:
$R = 5r$
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{9r^2 + 3r^2}{25r^2} = \frac{12}{25}$$

3128.- La figura consta de dos quadrats concèntrics, i 8 triangles equilàters iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea lila i l'àrea verda.

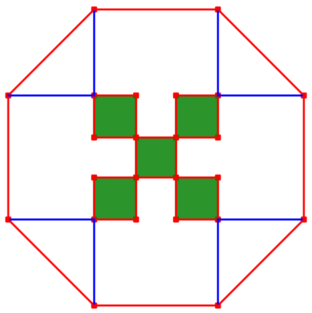


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$ de centre O i costat $\overline{EF} = c$
Els vuit triangles equilàters tenen costat $\overline{EF} = c$
Siga P el punt mig del costat $\overline{EF}$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$.

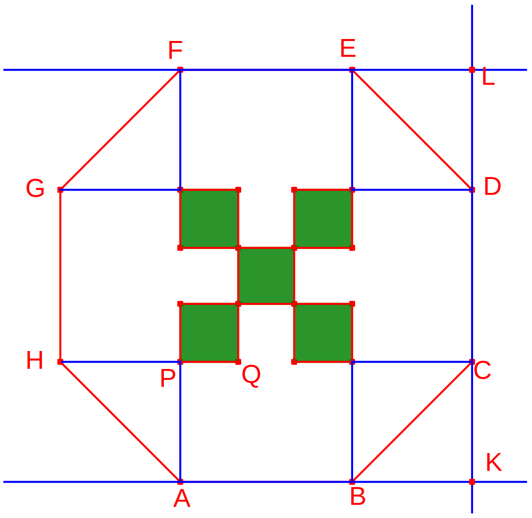


$$\overline{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$
$$\overline{MN} = \left(1+\sqrt{3}\right)c = 1$$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
L'àrea del quadrat $EFGH$ és:
$$S_{EFGH} = c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$
L'àrea de la zona lila és:
$$S_{lila} = S_{ABCD} - (S_{EFGH} + 8 \cdot S_{EFM})$$
$$S_{lila} = 1 - \left(c^2 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c^2\right) = 1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{lila}}{S_{EFGH}} = \frac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = 3$$

3129.- L'octògon regular de la figura conté cinc quadrats iguals.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels cinc quadrats i l'àrea de l'octògon



Solució:



Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = 3$

$\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 1$

Siga K la intersecció de les rectes AB, CD.

Siga L la intersecció de les rectes CD, EF.

$\overline{CK} = \overline{DL} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3$

$\overline{KL} = 3(1 + \sqrt{2})$

L'àrea dels cinc quadrats és:

$S_{5q} = 5$

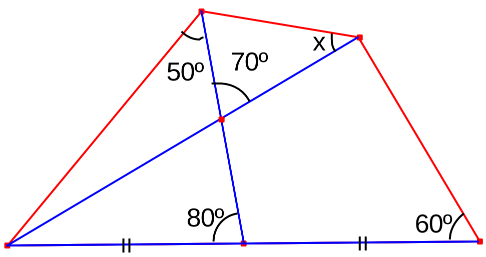
L'àrea de l'octògon regular és:

$S_{ABCDEFGH} = \left(3(1 + \sqrt{2})\right)^2 - 3^2 = 18(1 + \sqrt{2})$

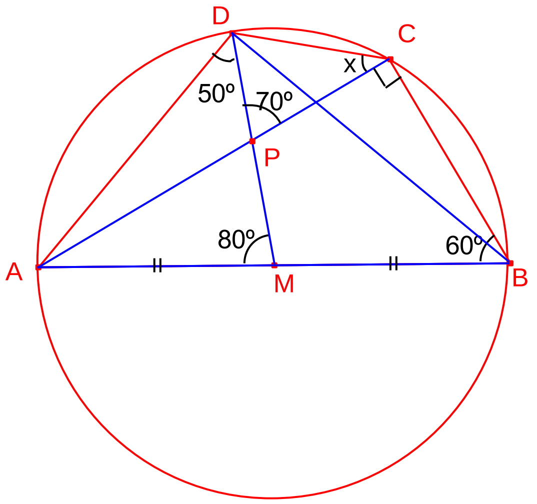
La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{5q}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{5}{18(1 + \sqrt{2})} = \frac{5(\sqrt{2} - 1)}{18} \approx 0.1151$

3130.- En la figura, determineu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga el quadrilàter $ABCD$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga P la intersecció de $\overline{AC}, \overline{DM}$
Siga $\angle ABC = 60°, \angle AMD = 80°, \angle CPD = 70°, \angle ADM = 50°$

$\angle CPM = 110°$
$\angle PMB = 100°$
$\angle ACB = 360° - (110° + 100° + 60°) = 90°$
$\angle DAB = 50°$
Aleshores, $\overline{AM} = \overline{DM} = \overline{BM}$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DMB}$ és isòsceles:
$\angle MDB = \angle MBD = 40°$
$\angle ADB = 90°$

Aleshores, el quadrilàter $ABCD$ és inscriptible ja que $\angle ADB = \angle ACB = 90°$
Aleshores, $x = \angle ABD = 40°$