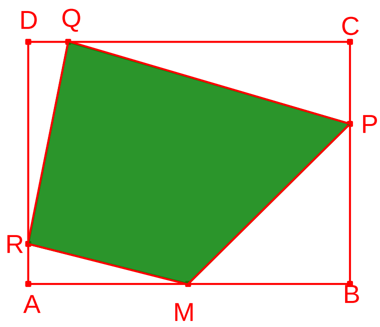
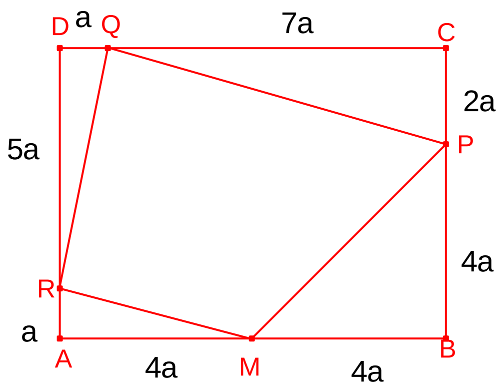
3131.- Siga el rectangle $ABCD$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{BP} = 2 \cdot \overline{CP}$
$\overline{AM}$=4·$\overline{AD}$
$\overline{CP} = 2 \cdot \overline{AR}$
$\overline{AR} = \overline{DR}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBP}$ és 128 cm^2
Calculeu:

a) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$.
b) L'àrea del quadrilàter $ABPR$
c) L'àrea del quadrilàter $MPQR$

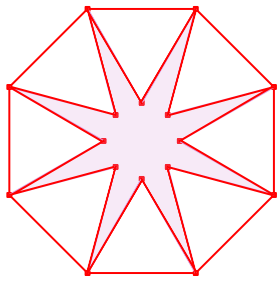


Solució:
Siga $\overline{AR} = a$
Aleshores:
$\overline{DQ} = a, \overline{CP} = 2a, \overline{BP} = 4a$
$\overline{BM} = 4a$
$\overline{DR} = 5a, \overline{CQ} = 7a$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBP}$ és 128 cm^2, aleshores:
$\frac{1}{2} 4a \cdot 4a = 128$
$a^2 = 16$
Resolent l'equació:
$a = 4$
a)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$ és:
$S_{PCQ} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 7a = 7a^2 = 112$
b)
L'àrea del trapezi $ABPR$ és:
$S_{ABPR} = \frac{a + 4a}{2} \cdot 8a = 20a^2 = 320$
c)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{RDQ}$ és:
$S_{RDQ} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5a = \frac{5}{2} a^2 = 40$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMR}$ és:
$S_{AMR} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4a = 2a^2 = 32$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 8a \cdot 6a = 48a^2 = 768$
L'àrea del quadrilàter $MPQR$ és:
$S_{MPQR} = S_{ABCD} - \left(S_{MBP} + S_{PCQ} + S_{RDQ} + S_{AMR}\right) = 768 - (128 + 112 + 40 + 32) = 456$

3132.- En l'interior d'un octògon regular s'han dibuixat, sobre els costats, vuit triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees l'estel ombrejat que formen i de l'octògon.



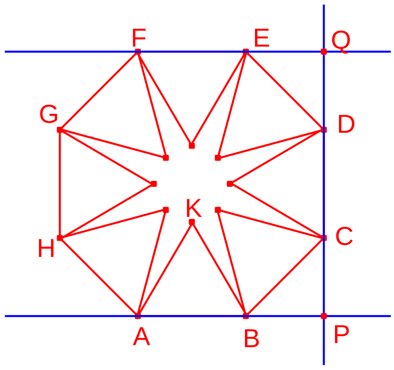
Solució:

Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABK}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga P la projecció de B sobre la recta CD

Siga Q la projecció de E sobre la recta CD



$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{PQ} = \left(1 + \sqrt{2}\right)c$$

L'àrea de l'octògon regular és:

$$S_{ABCDEFGH} = \overline{PQ}^2 - c^2 = \left(\left(1 + \sqrt{2}\right)c\right)^2 - c^2 = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2$$

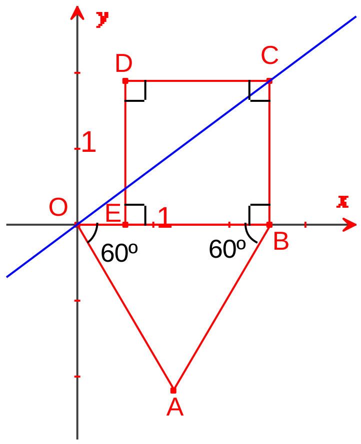
L'àrea de l'estel és igual a l'àrea de l'octògon regular menys la suma de les àrees dels vuit triangles equilàters.

$$S_{estel} = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2 - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = 2\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)c^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{estel}}{S_{ABCDEFGH}} = \frac{2\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)c^2}{2\left(1 + \sqrt{2}\right)c^2} = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{6} \approx 0.2826$$

3133.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ i el quadrat $BCDE$ tenen el mateix perímetre.
Determineu l'equació de la recta que passa pels punts O, C.

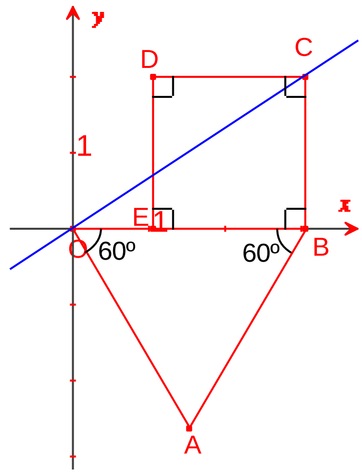


Solució:

El triangle el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.
Siga $\overline{OB} = c$ el seu costat.
El punt B té coordenades $B(c, 0)$.
Siga el quadrat $BCDE$ de costat $\overline{BC} = d$
El punt C té coordenades $C(c, d)$.

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ i el quadrat $BCDE$ tenen el mateix perímetre.
Aleshores: $3c = 4d$
Aleshores,
$$d = \frac{3}{4}c$$
El pendent de la recta que passa per O, C és:
$$m = \frac{3}{4}$$
La seua equació és:
$$y = \frac{3}{4}x$$

3134.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ i el quadrat $BCDE$ tenen la mateixa àrea.
Determineu l'equació de la recta que passa pels punts O, C.



Solució:

El triangle el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.
Siga $\overline{OB} = c$ el seu costat.
El punt B té coordenades $B(c, 0)$.
Siga el quadrat $BCDE$ de costat $\overline{BC} = d$
El punt C té coordenades $C(c, d)$.
El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ i el quadrat $BCDE$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores: $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = d^2$
Aleshores,

$$d = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}c$$

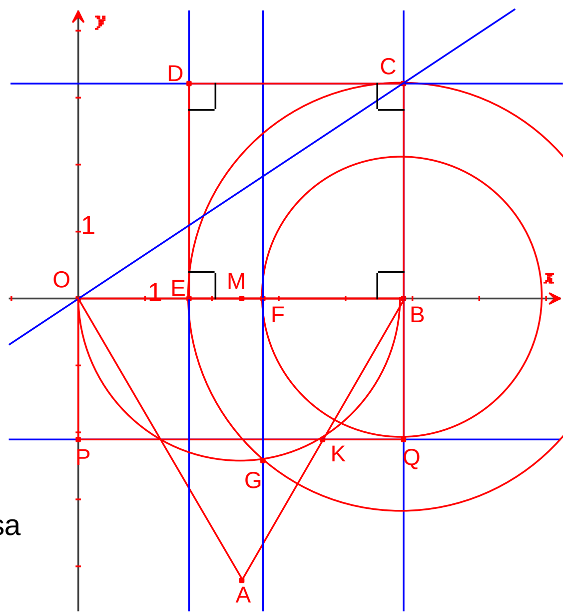
El pendent de la recta que passa per O, C és:

$$m = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$$

La seua equació és:

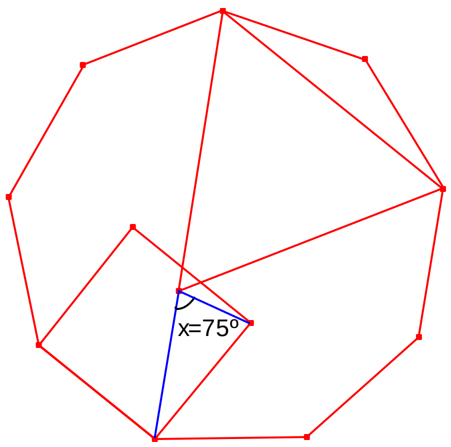
$$y = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}x$$

Construcció geomètrica.



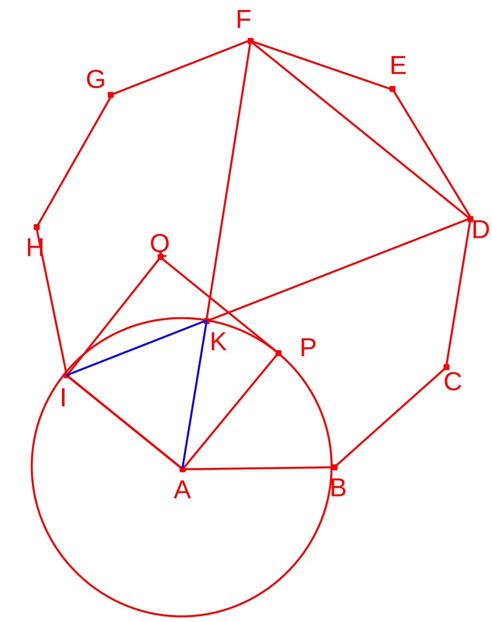
a) Dibuixeu el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OAB}$
b) Dibuixeu els punts migs M, K dels costats $\overline{OB}, \overline{AB}$
c) Dibuixeu la semicircumferència de centre M i diàmetre $\overline{OB}$
d) Dibuixeu la recta que passa per K paral·lela a OB
e) Dibuixeu la recta perpendicular a OB que passa per B.
f) Dibuixeu el rectangle $OBQP$ (el rectangle té la mateixa àrea que el triangle equilàter)
g) Dibuixeu la circumferència que de centre B que passa per Q que talla la recta OB en el punt F.
h) Dibuixeu la recta perpendicular a OB que passa per F que talla la semicircumferència en el punt G
i) Dibuixeu la circumferència de centre B que passa per G. Que talla la recta BQ en el punt C i la recta OB en el punt E.
j) Dibuixeu el quadrat $BCDE$. (El quadrat $BCDE$ té la mateixa àrea que el rectangle $OBQP$).
k) Dibuixeu la recta que passa pels punts O, C.

3135.- En un polígon regular de 9 costats s’han dibuixat un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu proveu que $x = 75°$

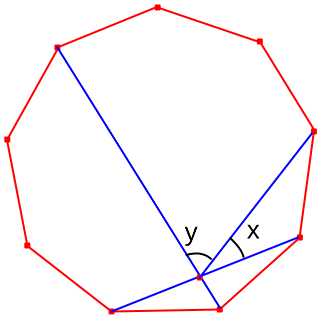


Solució:
Siga $ABCDEFGHI$ l’enneàgon regular.
Siga el quadrat $IAPQ$.
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DFK}$

$\angle DFE = 20°, \angle GFE = 140°$
$\angle GFK = 140° - (60° + 20°) = 60°$
$\angle GFA = 60°$
Aleshores, F, K, A estan alineats.
Anàlogament D, K, I estan alineats.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{IAK}$ és equilàter,
Per tant, $\overline{AK} = \overline{AP}$
$\angle KAF = 30°$
Aleshores, $x = \angle AKP = 75°$



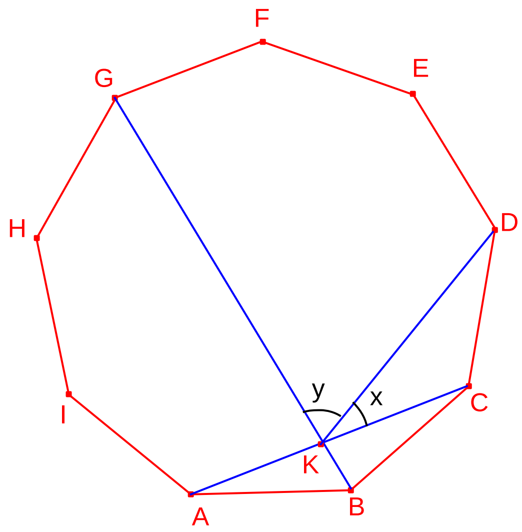
3136.- Donat el polígon regular de 9 costats, determineu la mesura dels angles x, y



Solució:
Siga l'enneàgon regular $ABCDEFGHI$.
Siga K la intersecció de les diagonals $\overline{AC}, \overline{BG}$
Siguen $x = \angle CKD, y = \angle DKG$
$\angle ABC = 140°, \angle BAC = BCA = 20°$
$\angle GBC = 80°$
$\angle BKC = 180° - (20° + 80°) = 80°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCK}$ és isòsceles $\overline{CK} = \overline{BC}$
Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{KCD}$ és isòsceles $\overline{CK} = \overline{CD}$
$\angle ACD = 120°$

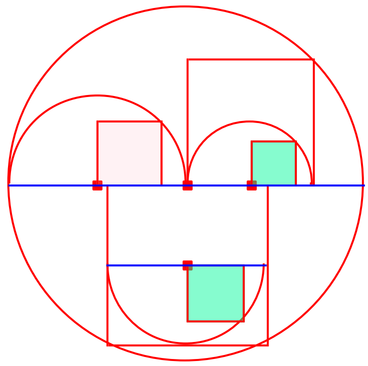
$$x = \angle CKD = CDK = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$$

$$y = \angle DKG = 180° - (30° + 80°) = 70°$$



3137.- A la figura hi ha una circumferència, tres semicircumferències i cinc quadrats.
Els centres de la circumferència i de les semicircumferències estan remarcats.

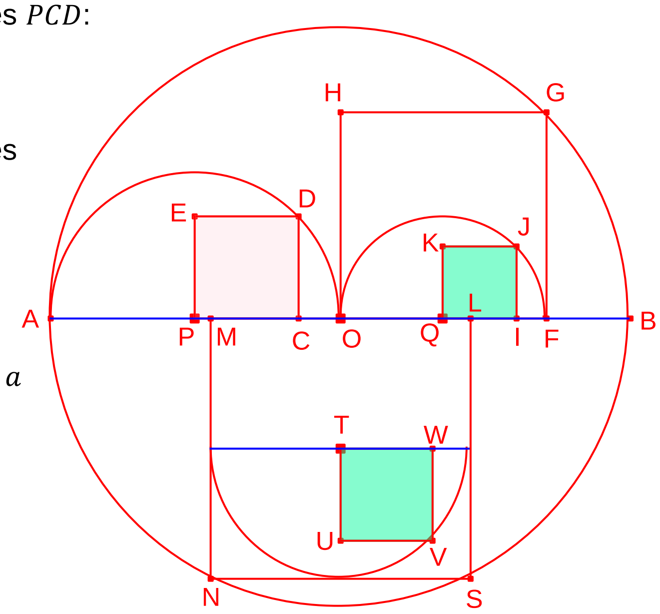
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat rosa i la suma de les àrees dels quadrats verds.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 2r$
Siga la semicircumferència de centre P i diàmetre $\overline{OA} = 2r$
Siga el quadrat $PCDE$ de costat $\overline{PC} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PCD}$:

$c^2 = \frac{1}{2}r^2$



Siga el quadrat $OFGH$ de costat $\overline{OF} = \overline{FG} = a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OFG}$:
$4r^2 = a^2 + a^2$
$a^2 = 2r^2$
Siga la semicircumferència de centre Q.
Siga el quadrat $QIJK$ de costat $\overline{QI} = d$
Els quadrats $PCDE, QIJK$ són semblants i de raó $2r{:}\,a$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\left(\frac{d}{c}\right)^2 = \left(\frac{a}{2r}\right)^2$$

$$d^2 = \frac{a^2}{4r^2} \cdot c^2 = \frac{1}{4}2 \cdot \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{4}r^2$$

Siga el quedat $LMNS$ de costat $\overline{LM} = b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OMN}$:

$$4r^2 = b^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$b^2 = \frac{1}{5}r^2$$

Siga el quadrat $TUVW$ de costat $\overline{TU} = e$
Els quadrats $PCDE, TUVW$ són semblants i de raó $2r{:}\,b$
Aplicant el teorema de Tales:

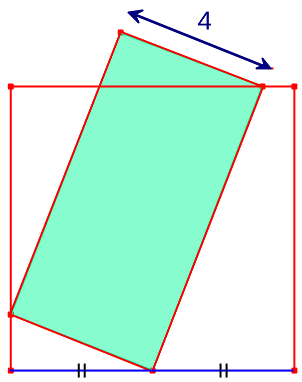
$$\left(\frac{e}{c}\right)^2 = \left(\frac{b}{2r}\right)^2$$

$$e^2 = \frac{b^2}{4r^2} \cdot c^2 = \frac{4}{5}\frac{1}{2}r^2 = \frac{2}{5}r^2$$

La proporció d'àrees és:

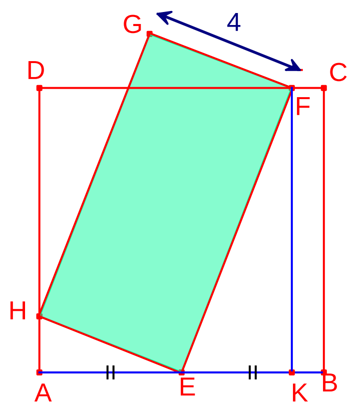
$$\frac{S_{rosa}}{S_{verda}} = \frac{c^2}{d^2 + e^2} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{\frac{1}{4}r^2 + \frac{2}{5}r^2} = \frac{10}{13}$$

3138.- En la figura, hi ha un quadrat i un rectangle.
Calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.

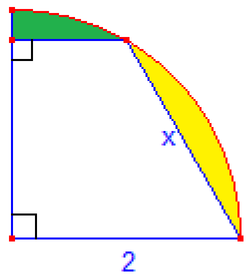


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$
Siga E el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga el rectangle $EFGH$ de costats $\overline{EH} = 4, \overline{EF} = b$
Siga K la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$.

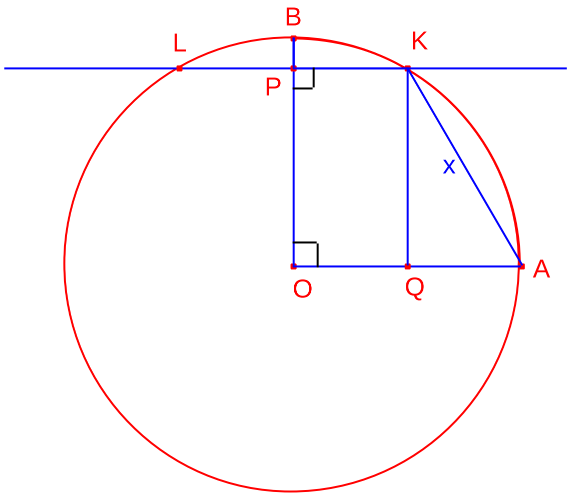
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HAE}, \overset{\Delta}{EKF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{4}{b} = \frac{a}{2a}$$
Aleshores,
$b = 8$
L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$S_{EFGH} = 4 \cdot b = 4 \cdot 8 = 32$



3139.- En el quadrant de radi 2, les àrees de la zona groga i la verda estan en proporció $2:1$.
Determineu la mesura de la corda x

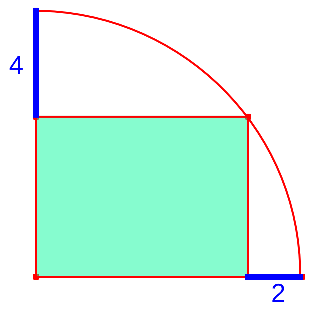


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
Siga $\overline{AK} = x$
Considerem la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
La recta PK talla la circumferència en el punt L.
L'àrea groga és el doble de l'àrea verda, aleshores:
$\overline{AK} = \overline{LK} = x$

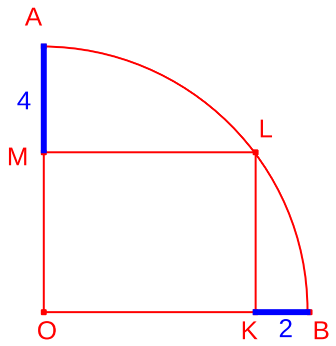


$\overline{PK} = \frac{1}{2}x, \overline{PK} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OQK}, \overset{\Delta}{AQK}$:
$x^2 - \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2 = 2^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2$
Simplificant:
$x^2 + 2x - 8 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 2$
Aleshores, el segment $\overline{AK} = \overline{OA} = 2$ és el costat d'un hexàgon regular inscrit en la circumferència.

3140.- En un quadrant s’ha inscrit un rectangle.
Si els segment remarcats mesuren 2 i 4, calculeu l’àrea del rectangle.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = r$
Siga el rectangle $OKLM$ de costats $\overline{OK} = r - 2, \overline{OM} = r - 4$



Apliant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:
$r^2 = (4 - 4)^2 + (r - 2)^2$
Simplificant:
$r^2 - 12r + 20 = 0$
Resolent l’equació:
$r = 10$