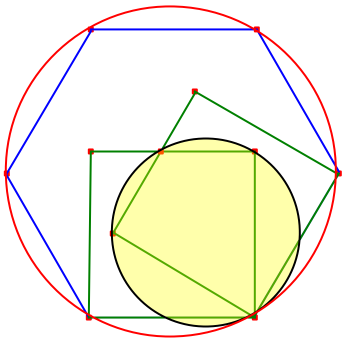
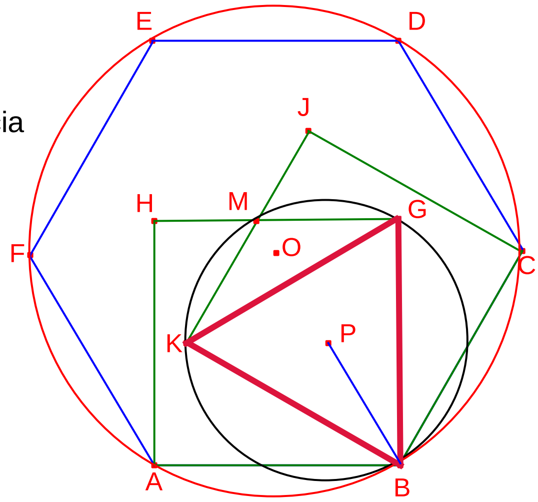
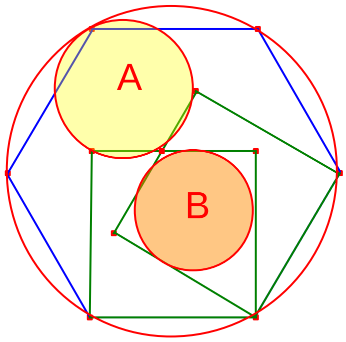
3141.- Sobre dos costats d'un hexàgon regular s'ha dibuixat dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del cercle circumscrit a l'hexàgon regular.



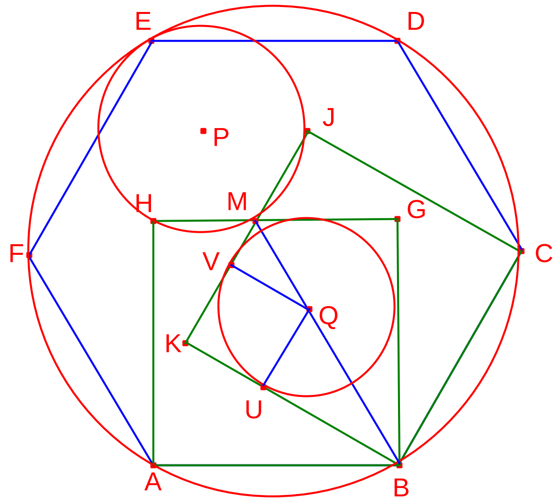
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $O$ el centre de l'hexàgon regular.
El radi de la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular és $\overline{OA} = \overline{AB} = c$
Siguen els quadrats $ABGH, BCJK$ de costat $\overline{AB} = c$
$\angle GBC = \angle ABK = 120° - 90° = 30°$
$\angle GBK = 60°$
El triangle $\overset{\Delta}{BGK}$ és equilàter.
La circumferència ombrejada és igual a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BGK}$
Siga $P$ el centre.
El radi és:
$\overline{PB} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{3}c$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\overline{PB}^2}{c^2} = \frac{1}{3}$



3142.- Sobre dos costats d'un hexàgon regular s'ha dibuixat dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle $A$ i l'àrea del cercle $B$.



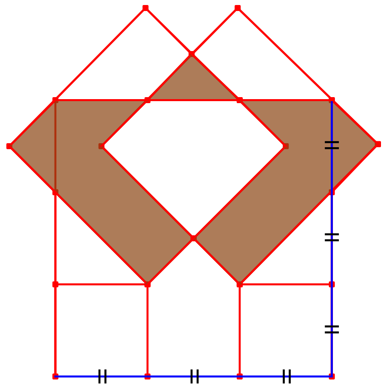

Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $O$ el centre de l'hexàgon regular.
Siguen els quadrats $ABGH, BCJK$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga $M$ el punt intersecció dels dos quadrats.




$\angle GBC = \angle ABK = 120° - 90° = 30°$
$\angle MBK = 30°$
$$\overline{MK} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BK} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$
$$\overline{BM} = 2 \cdot \overline{MK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$$
$$\overline{EM} = 2c - \overline{BM} = 2c - \frac{2\sqrt{3}}{3}c = 2\frac{3-\sqrt{3}}{3}c$$
Siga $P$ el centre de la circumferència $A$.
El radi és:
$$\overline{PE} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}c$$
Siga $Q$ el centre de la circumferència $B$ inscrita al quadrilàter $BGMK$, de radi $\overline{QU} = \overline{QV} = r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKM}, \overset{\Delta}{QVM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}c - r}{\frac{\sqrt{3}}{3}c}$$
Simplificant:
$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{PE}^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}c\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}c\right)^2} = \frac{4}{3}$$

3143.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



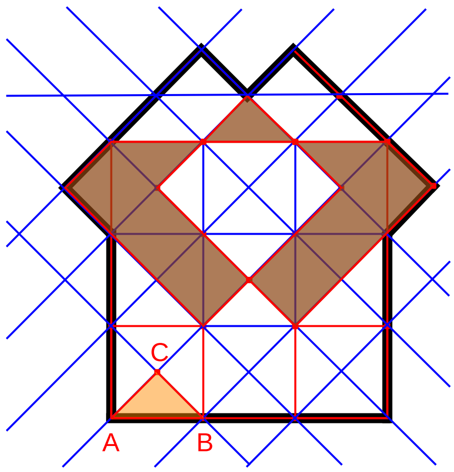
Solució:

Siga $S_{ABC} = 1$

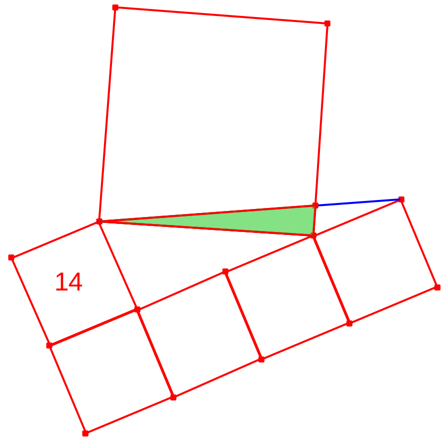
$S_{ombrejada} = 15$

$S_{total} = 45$

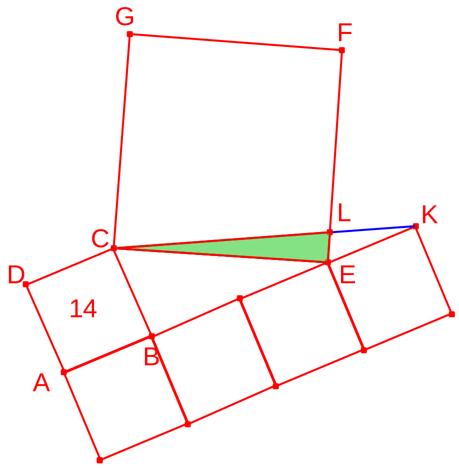
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$



3144.- En la figura, hi ha cinc quadrats, quatre d'ells iguals d'àrea 14.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$ i àrea 14.
$a^2 = 14$

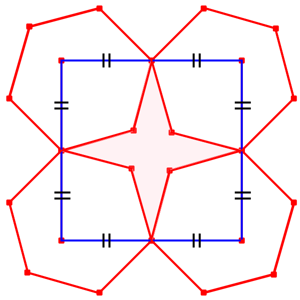



Siga el quadrat $CEFK$.
$\overline{CE} = a\sqrt{5}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEL}$.
Siga $x = \overline{EL}$
Siguen els angles $\angle BEC = \alpha, \angle BKC = \beta$
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\overline{CK} = a\sqrt{10}$
$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$
$\angle ELK = 90° + \alpha - \beta$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{LEK}$:
$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{a}{\cos(\alpha - \beta)}$$
$$x = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}}a = \frac{5}{7\sqrt{5}}a$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEL}$ és:
$$S_{CEL} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}\cdot x = \frac{1}{2}a\sqrt{5}\cdot\frac{5}{7\sqrt{5}}a = \frac{5}{14}a^2 = 5$$

3145.- En la figura, quatre hexàgons regulars iguals s'han dibuixat al voltant d'un quadrat. Calculeu la proporció d'àrees de la zona ombrejada i l'àrea total de la figura.



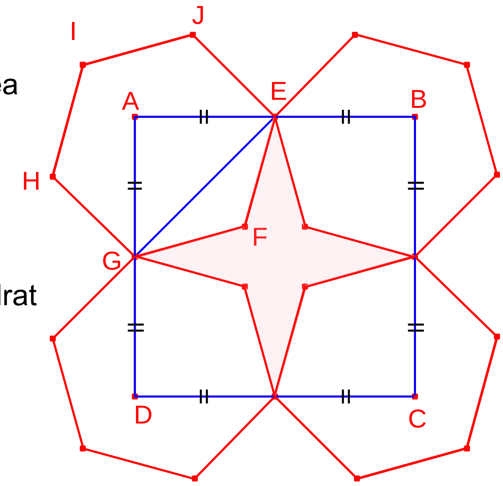
Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2a$

$\overline{GE} = a\sqrt{2}$

Siga l'hexàgon regular $EFGHIJ$.

$\overline{EF} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{GE} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$




L'àrea del quadrilàter $AEFG$ és igual a la suma de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEG}$ i l'àrea d'un triangle equilàter de costat $\overline{EF}$:

$$S_{AEFG} = \frac{1}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}a^2$$

L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del quadrat $ABCD$ menys quatre vegades l'àrea del quadrilàter $AEFG$:

$$S_{ombrejada} = 4a^2 - 4\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{6}a^2 = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}a^2$$

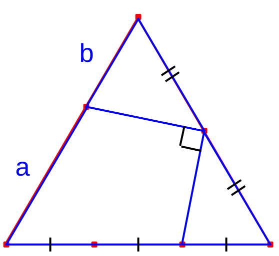
L'àrea total és igual a la suma de l'àrea dels quatre hexàgons regulars més l'àrea ombrejada:

$$S_{total} = 4\cdot 6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + \frac{6-2\sqrt{3}}{3} = \frac{6+10\sqrt{3}}{3}a^2$$

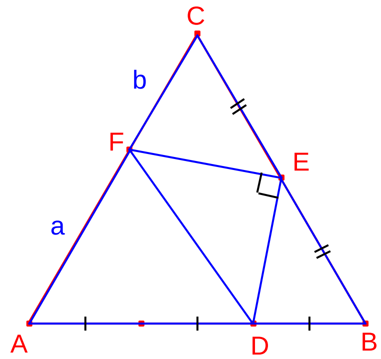
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}{\frac{6+10\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{11} \approx 0.1087$$

3146.- Un costat d'un triangle s'ha dividit en tres parts iguals, un altre costat s'ha dividit en dues parts iguals. Determineu la proporció $a: b$




Solució:




Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 6x$

$a + b = 6x$

$\overline{AD} = 4x, \overline{BD} = 2x, \overline{BE} = \overline{CE} = 3x$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DBE}$:

$$\overline{DE}^2 = 9x^2 + 4x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x\frac{1}{2} = 7x^2$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$\overline{DF}^2 = 16x^2 + a^2 - 2 \cdot 4x \cdot a\frac{1}{2} = 16x^2 + a^2 - 4ax$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FEC}$:

$$\overline{FE}^2 = 9x^2 + b^2 - 2 \cdot 3x \cdot b\frac{1}{2} = 9x^2 + b^2 - 3bx$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEF}$:

$16x^2 + a^2 - 4ax = 7x^2 + 9x^2 + b^2 - 3bx$

Simplificant:

$a^2 - 4ax = b^2 - 3bx$

$a = 6x - b$

$(6x - b)^2 - 4(6x - b)x = b^2 - 3bx$

Simplificant:

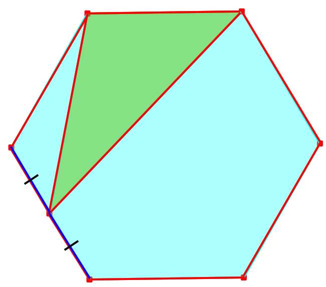
$12x^2 = 5bx.$

$$b = \frac{12}{5}x$$

$$a = 6x - \frac{12}{5}x = \frac{18}{5}x$$

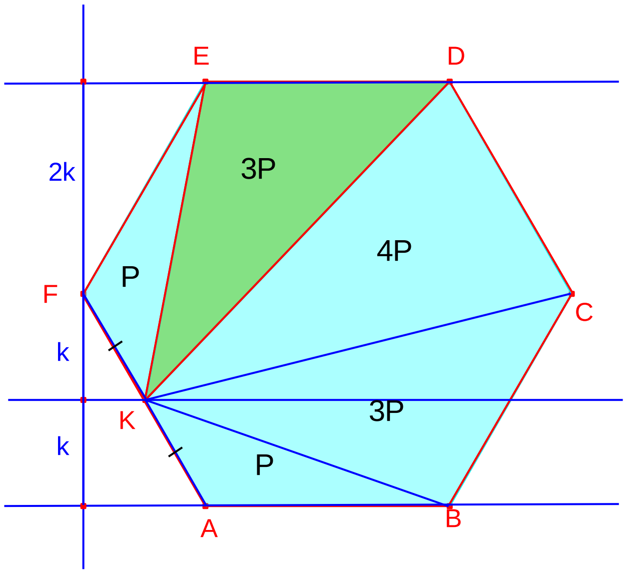
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{18}{5}x}{\frac{12}{5}x} = \frac{3}{2}$$

3147.- Donat l'hexàgon regular, determineu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea blava.

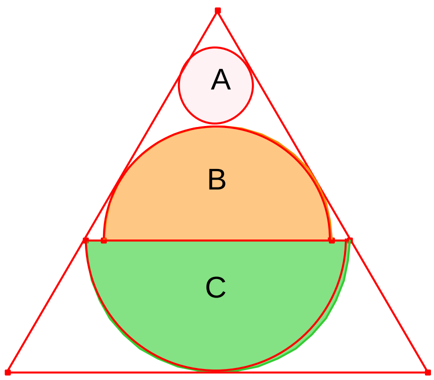


Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$
Siga $K$ el punt mig del costat $\overline{AF}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABK}, \overset{\Delta}{EFK}$ són iguals.
Siga $S_{EFK} = P$
Dos triangles que tenen la mateixa base les àrees són proporcionals a les altures.
Aleshores:
$S_{DEK} = 3 \cdot S_{EFK} = 3P$
$S_{CDK} = 4 \cdot S_{EFK} = 4P$
Els triangles $\overset{\Delta}{DEK}, \overset{\Delta}{CBK}$ són iguals.
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{verda}}{S_{blava}} = \frac{3P}{P + 8P} = \frac{1}{3}$$



3148.- En un triangle equilàter s'han dibuixat un cercle i dos semicercles d'àrees $A, B, C$.
Calculeu la relació $A: B: C$




Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{IJM}$ de costat $\overline{IJ} = 2$ i centre $O$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = c$

Siga la circumferència de centre $O$ i radi $r = \overline{OT}$

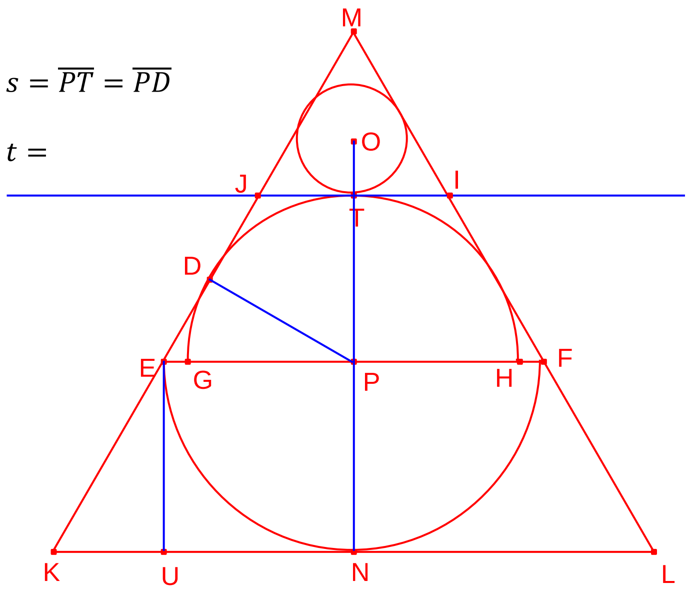
$\overline{MT} = 3r = \sqrt{3}$.

$r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Siga la semicircumferència de centre $P$ i radi $s = \overline{PT} = \overline{PD}$

$\overline{JT} = \overline{JD} = 1$

Siga la semicircumferència de centre $P$ i radi $t = \overline{PN} = \overline{PE}$




$\overline{DE} = \dfrac{1}{2}\overline{PE} = \dfrac{1}{2}t, \dfrac{s}{t} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{KE} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\overline{EU} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}t, \overline{KU} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}t$

$\overline{KM} = \overline{KL} = c$

$3 + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)t = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + 2\right)t$

Simplificant:

$t = 2$

$s = \sqrt{3}$

Calculem les proporcions:

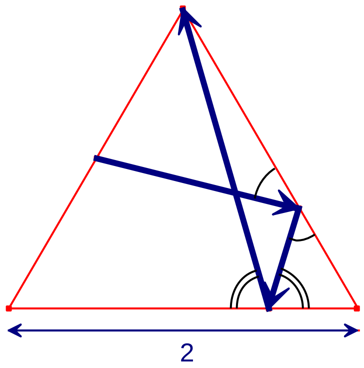
$$\frac{A}{B} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi s^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot 3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{A}{C} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi t^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{1}{6}$$

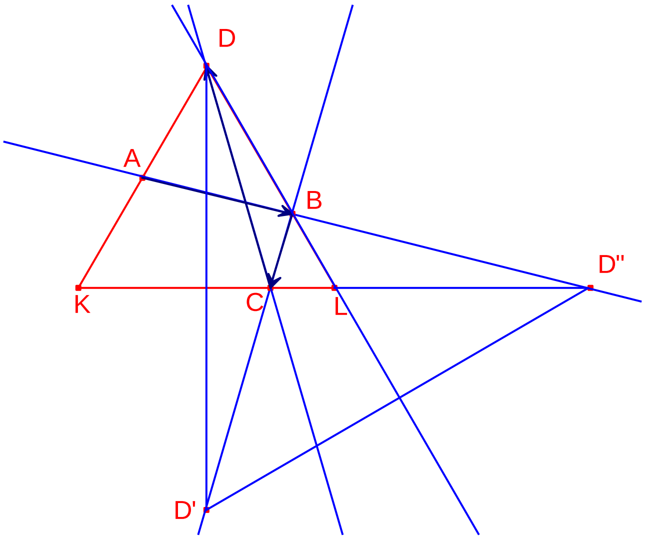
Aleshores,

$A: B: C = 2: 9: 12$

3149.- Calculeu la longitud de la trajectòria sabent que el triangle equilàter té costat 2.




Solució:




Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLD}$ de costat $\overline{KL} = 2$
Siga el trajecte $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

Siga $D'$ el simètric de $D$ respecte del costat $\overline{KL}$
$\overline{DC} = \overline{D'C}$
$\overline{DL} = \overline{D'L} = 2$

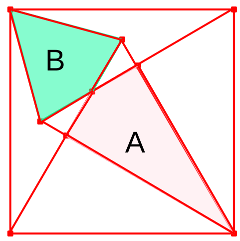
Siga $D''$ el simètric de $D'$ respecte del costat $\overline{DL}$
$\overline{D'L} = \overline{D''L} = 2$
$\overline{BD'} = \overline{BD''}$

$\overline{AD''} = \overline{AB} + \overline{BD''} = \overline{AB} + \overline{BD'} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD'} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

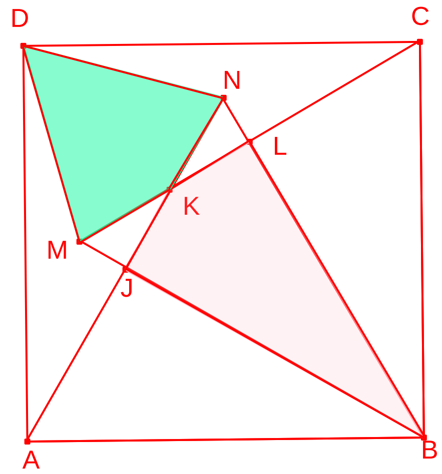
$\overline{AK} = 1, \overline{KD''} = 4$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AKD''}$
$\overline{AD''}^2 = 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13$
$\overline{AD''} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \sqrt{13}$

3150.- Sobre dos costats consecutius s’han dibuixat d9s quadrats
Determineu la proporció entre les àrees de la zona $A$ i la zona $B$




Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen els quadrilàters $BJKL, DMKN$.
$\angle AJB = 90°, \angle ABJ = 30°$
$\angle JBK = 15°$
$$\overline{BJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Siga $x = \overline{JK}$.




Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JBK}$:
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan 15° = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$
L’àrea del quadrilàter $BJKL$ és:
$$s_{BJKL} = x\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$$

$\angle AND = 75°, \angle KDN = 30°, \angle AKN = 75°$
Siga $y = \overline{DK} = \overline{DN}$
$$y = \frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
L’àrea del quadrilàter $DMKN$ és:
$$s_{DMKN} = y^2 \cdot \sin 30° = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$
La proporció d’àrees és:
$$\frac{s_{BJKL}}{S_{DMKN}} = \frac{\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}$$