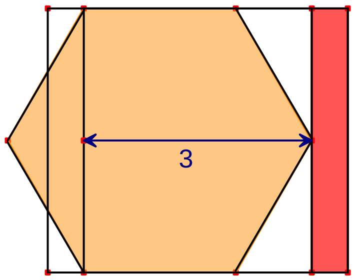
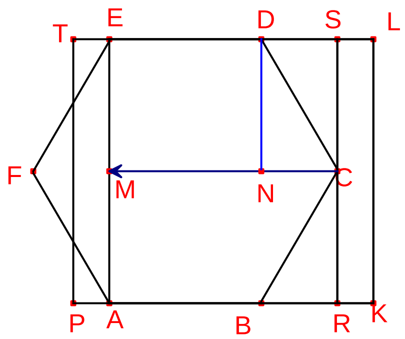
3151.- En la figura hi ha solapats dos quadrats i un hexàgon regular.
Calculeu l'àrea total de la zona ombrejada.




Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen $M, N$ els punts migs dels segments $\overline{AE} = \overline{BD}$

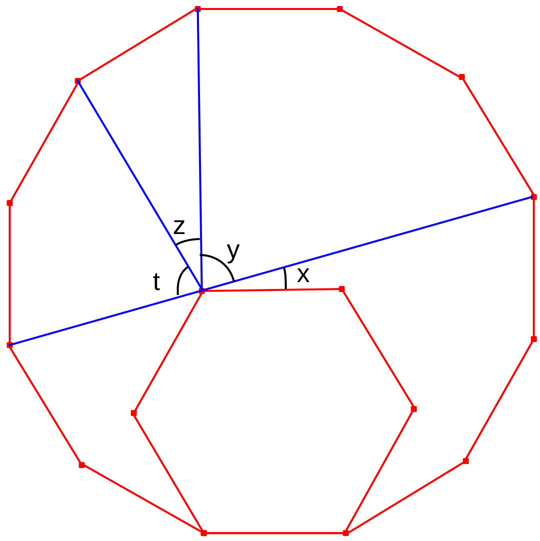



$\overline{MC} = 3$
$\overline{AE} = \overline{KL} = \overline{AK} = c\sqrt{3}$
$\overline{RK} = c\sqrt{3} - 3$

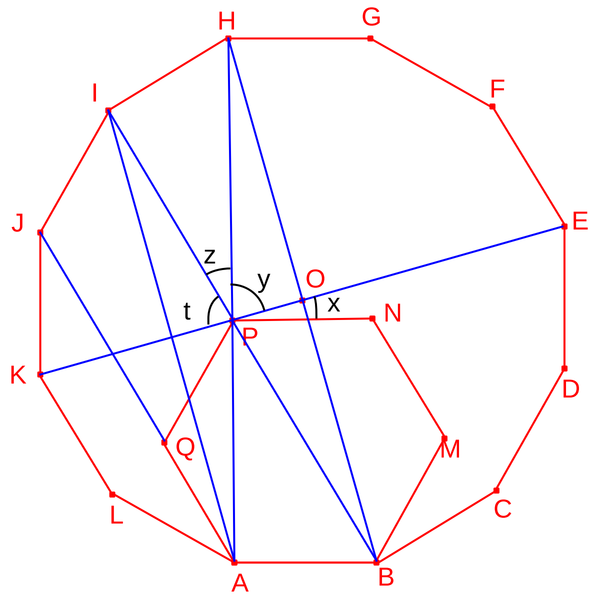
$\overline{CN} = \frac{1}{2}c = 3 - c$
Resolent l'equació:
$c = 2$
L'àrea total és:

$$S_{total} = S_{ABCDEF} + S_{RKLS} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + \left(c\sqrt{3} - 3\right)c\sqrt{3} = 3c^2 = 12$$

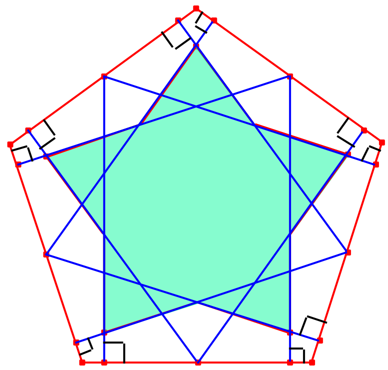
3152.- Sobre el costat d'un dodecàgon regular s'ha dibuixat un hexàgon regular. Determineu la mesura dels angles $x, y, z, t$



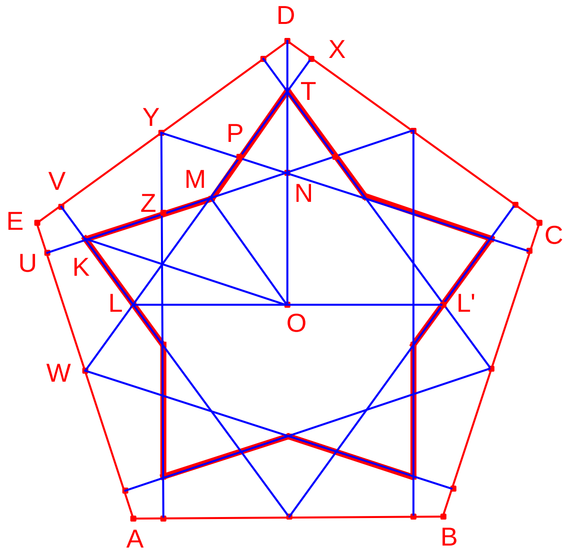

Solució:
Siga el dodecàgon regular $ABCDEFGHIJKL$ de centre $O$.
Siga l'hexàgon regular $ABMNPQ$
$\angle LAB = 150°, \angle QAB = 120°$
Aleshores, $\angle LAB = 300°$
$\angle LAJ = 30°$
Aleshores, $A, Q, J$ estan alineats.
$\angle QAP = 30°, \angle JAH = 30°$
Aleshores, $A, P, H$ estan alineats
$\angle ABP = 60°, \angle ABI = 60°$
Aleshores, $B, P, I$ estan alineats
Considerem les diagonals $\overline{KE}, \overline{BH}$ que són perpendiculars i es tallen en el centre $O$.
$\angle HBI = 15°, \angle AHB = 15°$
Aleshores, $\overline{BP} = \overline{HP}$, aleshores $P$ pertany a $\overline{KE}$
$z = \angle APB = 15°$
$y = \dfrac{2 \cdot 30° + 3 \cdot 30°}{2} = 75°$
$t = \dfrac{2 \cdot 30° + 3 \cdot 30°}{2} = 75°$
$x = 90° - y = 15°$



3153.- Determineu l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del pentàgon regular exterior



Solució:
Siga el pentàgon regular exterior $ABCDE$ de centre $O$.




$\angle MKL = \angle UKV = 360° - (108° + 90° + 90°) = 72°$
$\angle XWE = 360° - (108° + 108° + 90°) = 54°$
$\angle WLK = 360° - (108° + 54° + 90°) = 108°$
$\angle MLK = 72°$

El triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és auri.

Siga $\overline{KL} = 1, \overline{LM} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\angle EOM = \angle MKO = 36°$
Aleshores,

$$\overline{OM} = \overline{KM} = \overline{LM} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\angle EOD = 72°$
$\angle NOM = 36°$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{MNO}$ són iguals.

$\angle MPN = 180° - (36° + 36°) = 108°$

$$\overline{MN} =, \overline{MP} = \overline{NP} = \frac{1}{\Phi}$$

$\angle DYN = \angle YDN = 54°$
Aleshores:

$$\overline{YN} = \overline{DN} = \overline{LM} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\overline{OD} = 2\Phi$

L'àrea del pentàgon regular $ABCDE$ és:

$$S_{ABCDE} = 5 \cdot S_{AOE} = 5 \cdot \frac{1}{2} 4\Phi^2 \cdot \sin 72° = 10\Phi^2 \cdot 2 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° =$$
$$= 10 \cdot \Phi^2 \cdot 2 \cdot \sin 36° \cdot \frac{\Phi}{2}$$
$$S_{ABCDE} = 10 \cdot \Phi^3 \cdot \sin 36° = 10 \cdot (2\Phi + 1) \sin 36°$$

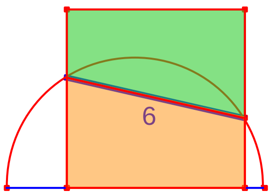
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 15 \cdot S_{KLM} + 5 \cdot S_{MNP} = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi^2 \cdot \sin 36° + 5 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\Phi^2} \cdot \sin 72°$$
$$S_{ombrejada} = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \Phi) \cdot \sin 36° + 5 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\Phi^2} \cdot 2 \cdot \sin 36° \cdot \frac{\Phi}{2} = 5 \cdot (2\Phi + 1) \sin 36°$$

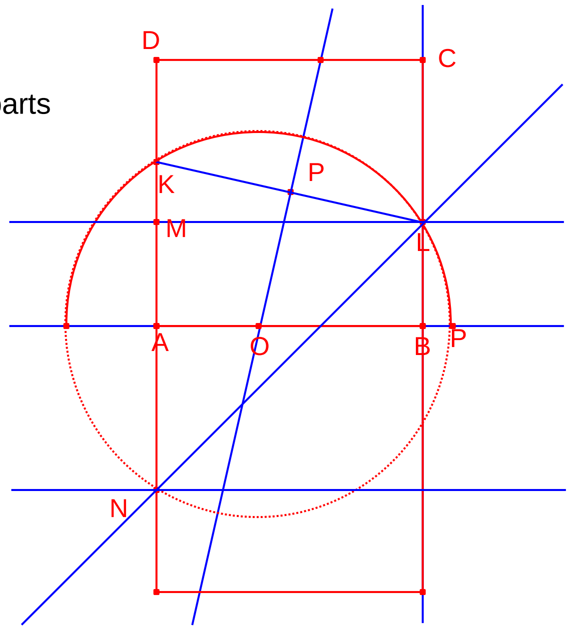
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDE}} = \frac{1}{2}$$

3154.- En la figura un segment de longitud 6 divideix el quadrat en dues parts iguals.
Determineu l'àrea del semicercle.

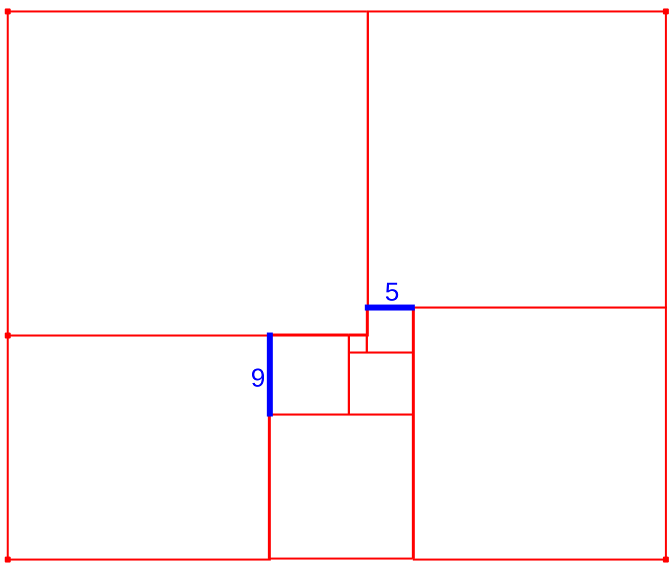



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$
Siga el segment $\overline{KL} = 6$
Siga $P$ el punt mig del segment $\overline{KL}$
Per dividir el segment $\overline{KL}$ el quadrat $ABCD$ en dues parts d'igual àrea. $P$ és el seu centre.
$\overline{AK} = \overline{CL}$
Siga el semicercle de centre $O$ i radi $\overline{OP} = R$
Considerem la circumferència que conté la semicircumferència.
Siga $M$ la projecció de $L$ sobre el costat $\overline{AD}$
La recta $AD$ talla la circumferència en el punt N.
$\overline{MN} = \overline{AB} = \overline{ML}$
Aleshores:
$\angle MNL = 45°$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KLN}$:

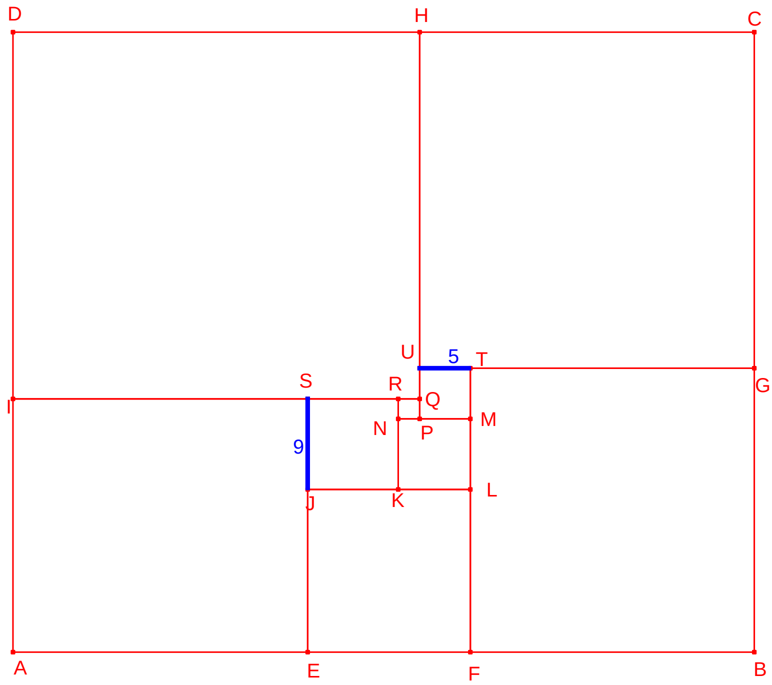



$$\frac{6}{\sin 45°} = 2R$$
$$R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$
L'àrea del semicercle és:
$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 = 9\pi$$

3155.- En la figura, en un rectangle, hi ha 9 quadrats dos d'ells de costats $9, 5$. Proveu que el llarg del triangle mesura 8 unitats més que l'ample.




Solució:




UT=5, JS=9

Siga a=RN

KN=9-1

JL=14+a

AE=23+a

IQ=ID=32+2a

AD=55+3a

FB=14+1+9-a+5=28

GC=33

BC=61

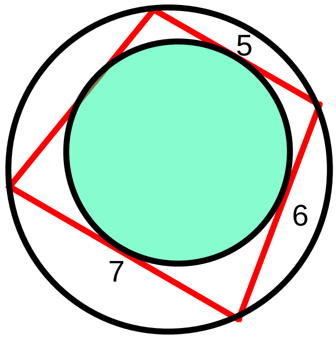
55+3a=61

a=2

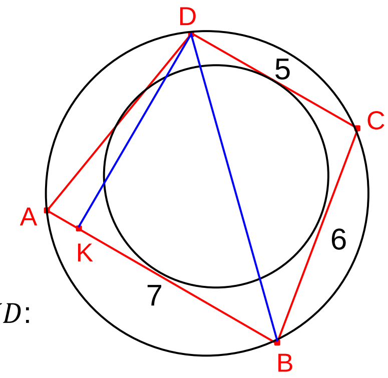
AB=23+a+14+a+28=65+2a=69

AB=BC+8

3156.- Un quadrilàter té una circumferència inscrita i una altra circumscrita.
Tres costats consecutius del quadrilàter mesuren $7, 6, 5$
Calculeu l'àrea dels dos cercles.



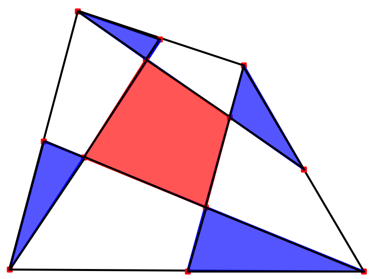

Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 7, \overline{BC} = 6, \overline{CD} = 5$
El quadrilàter $ABCD$ té una circumferència circumscrita de radi $r$, aleshores:
$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
$\overline{AD} = 7 + 5 - 6 = 6$
Per tant, $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$
$\angle BAD = \angle ABC, \angle CAD = \angle\alpha\alpha CBD$
$\angle ABD = \angle CAB = \alpha$
Anàlogament, $\angle CAD = \angle BCD = 180° - \alpha$



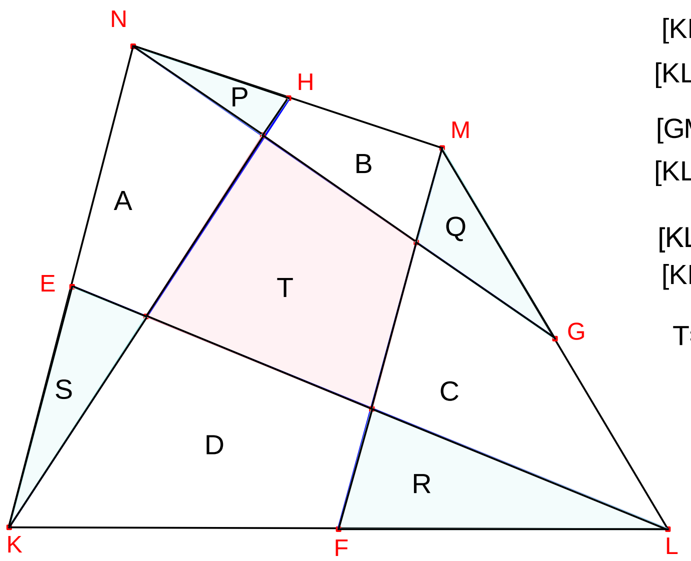

Aleshores, $ABCD$ és un trapezi isòsceles.
Siga K la projecció de D sobre $\overline{AB}$
$\overline{AK} = \dfrac{7-5}{2} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKD}$:
$\overline{DK} = 2r = \sqrt{35}$
$r = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$
L'àrea del cercle inscrit és:
$S_{inscrit} = \pi r^2 = \dfrac{35}{4}\pi$

Siga $R$ el radi de la circumferència circumscrita al quadrilàter $ABCD$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKD}$:
$$\overline{BD} = \sqrt{35 + 6^2} = \sqrt{71}$$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\dfrac{\overline{BD}}{\sin\alpha} = 2R$
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$
$\dfrac{\sqrt{71}}{\frac{\sqrt{35}}{6}} = 2R$
Resolent l'equació:
$R = \dfrac{3\sqrt{71}}{\sqrt{35}}$
L'àrea del cercle circumscrit és:
$S_{circumscrit} = \pi R^2 = \dfrac{639}{35}\pi$

3157.- En un quadrilàter convex s'han unit cada vèrtex en el punt mig del costat consecutiu.
Proveu que l'àrea de quadrilàter interior és igual a la suma de les àrees dels quatre triangles.



Solució:




[KHN]=[KMH], [FLM]=[KFM]

[KLMN]=2(P+S+A)+2(Q+R+C)

[GMN]=[LGN], [EKL]=[NEL]

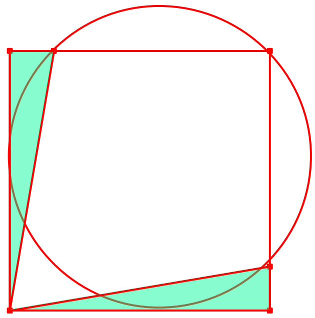
[KLMN]=2(P+Q+B)+2(S+R+D)

[KLMN]=2·[P+Q+R+S]+A+B+C+D

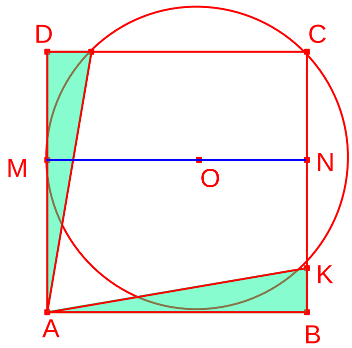
[KLMN]=P+Q+R+S+A+B+C+D+T

T=P+Q+R+S

3158.- La circumferència de la figura té radi 2 i és tangent a dos costats consecutius d'un quadrat i passa pel vèrtex oposat.
Calculeu la suma de les àrees dels dos triangles ombrejats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre $O$ i radi $\overline{OC} = 2$.
Siga $M$ el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AD}$

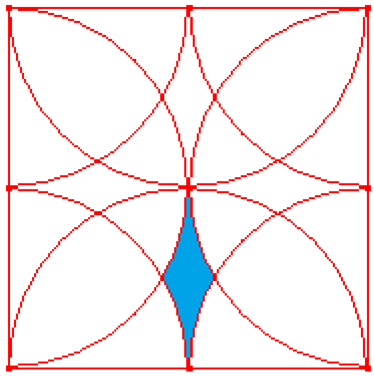



$\overline{OM} = \overline{AM} = 2$
$\overline{OA} = 2\sqrt{2}$
$\overline{AC} = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$
$$c = \overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC} = 2 + \sqrt{2}$$

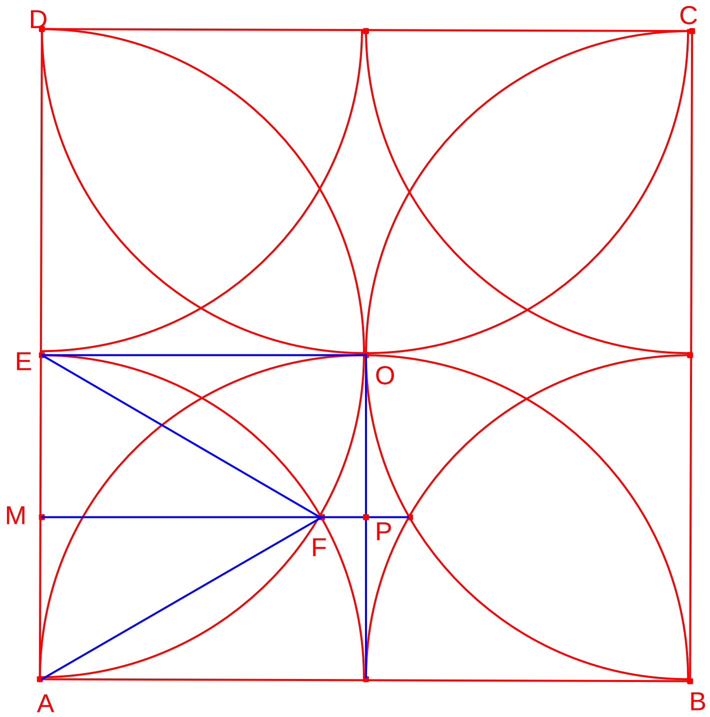
Siga $N$ la projecció de $O$ sobre el costat $\overline{BC}$
$$\overline{CN} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$$
$\overline{BK} = c - 2 \cdot \overline{CN} = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{ABK} = c \cdot \overline{BK} = \left(2 + \sqrt{2}\right)\left(2 - \sqrt{2}\right) = 2$$

3159.- En un quadrat de costat 1 s'han dibuixat quatre semicircumferències i quatre quadrants.

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:




Siga el quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\overline{AB} = 1$
Siga $E$ el punt mig del costat $\overline{AD}$
Siga $M$ el punt mig del costat $\overline{AE}$
Siga $F$ la intersecció del semicercle de centre $E$ i el quadrant de centre $A$.

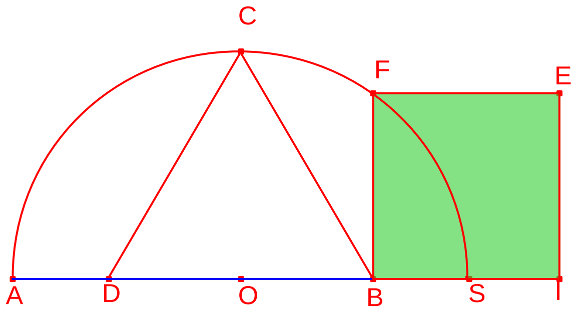
$$\overline{EF} = \overline{AF} = \overline{AE} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{MF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del rectangle $MPOE$ menys l'àrea del sector de centre $E$, radi $\frac{1}{2}$ i $30°$, menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{EMF}$

$$S_{ombrejada} = 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0.0217$$

3160.- El semicercle de la figura té radi 3.
$\overset{\Delta}{DBC}$ és un triangle equilàter.
Calculeu l'àrea del quadrat $BIEF$.




Solució:
$\overline{OC} = \overline{OF} = 3$
$\overline{OB} = \sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBF}$
$\overline{BF} = \sqrt{6}$
L'àrea del quadrat $BIEF$ és:
$S_{BIEF} = 6$