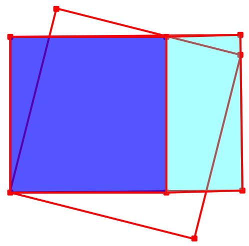
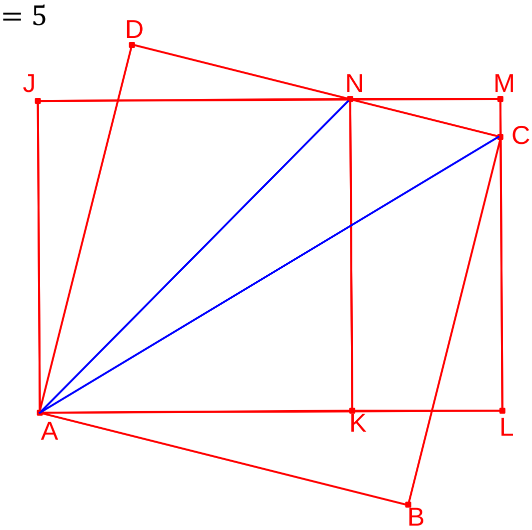
3161.- En la figura hi ha dos quadrats.
L'àrea del quadrat gran mesura 25.
Calculeu la suma de les àrees del quadrat i del rectangle ombrejats.

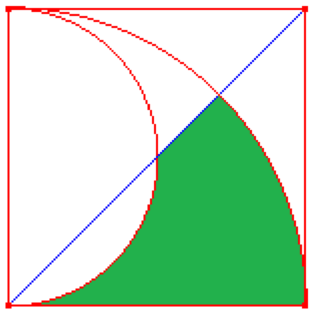


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 25, és a dir, de costat $\overline{AB} = 5$
Siga el quadrat $AKNJ$ de costat $\overline{AK} = c$
Siga el rectangle $KLMN$ de costats $\overline{KL} = d, \overline{LM} = c$
$\overline{AN} = c\sqrt{2}, \overline{AC} = 5\sqrt{2}$
$\angle DAN = \angle LAC$

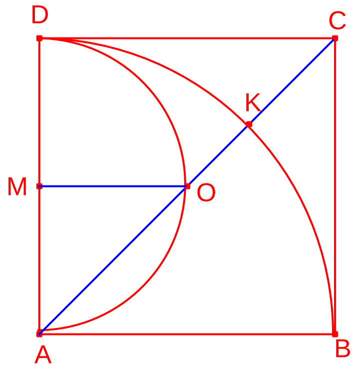


Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADN}, \overset{\Delta}{ALC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{5}{c+d} = \frac{c\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$$
Simplificant:
$(c+d)c = 25$
L'àrea del rectangle $ALMJ$ és:
$S_{AMLJ} = (c+d)c = 25$

3162.- En un quadrat d costat 2π s'ha dibuixat un quadrant amb centre un vèrtex i un semicercle de centre el punt mig d'un costat i una diagonal. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



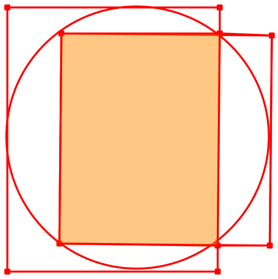
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2\pi$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$

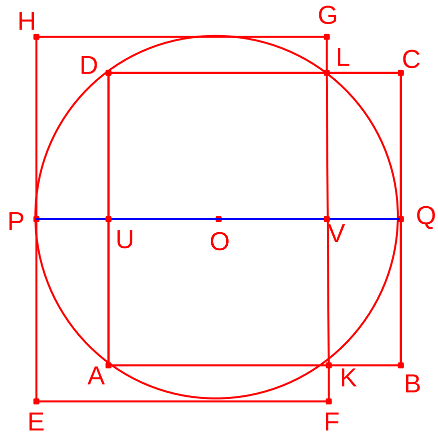
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un octant de centre A i radi 2π menys l'àrea d'un quadrant de centre M i radi π més l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$S = \frac{1}{8}\pi(2\pi)^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot \pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{\pi^2(\pi+2)}{4} \approx 12.6864$$

3163.- En la figura s'ha dibuixat un quadrat un rectangle i una circumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OP} = R$
Siga $\overline{PU} = \overline{QV} = a$
$a + c = 2R$
Siga el rectangle $EFGH$ de costats $\overline{EF} = \overline{AB} = c, \overline{EH} = 2R$



$\overline{OU} = R - a = c - R, \overline{UA} = \frac{1}{2}c, \overline{OA} = R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AUO}$:

$R^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (c - R)^2$

Simplificant:

$\frac{5}{4}c^2 - 2cR = 0$

$c = \frac{8}{5}R$

L'àrea ombrejada és:

$S_{AKLD} = 2(c - R)c = 2\left(\frac{8}{5}R - R\right)\frac{8}{5}R = \frac{48}{25}R^2$

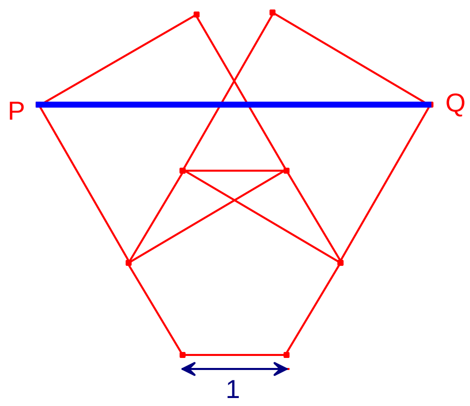
L'àrea total de la figura és:

$S_{Total} = S_{EFGH} + S_{KBCL} = c \cdot 2R + (2R - c)c = \frac{8}{5}R \cdot 2R + \left(2R - \frac{8}{5}R\right)\frac{8}{5}R = \frac{96}{25}R^2$

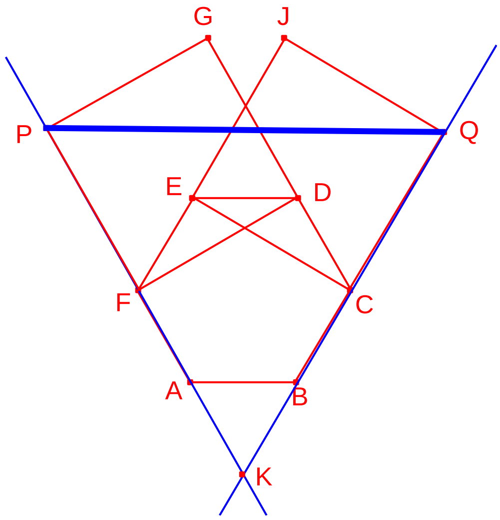
La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{AKLD}}{S_{Total}} = \frac{\frac{48}{25}R^2}{\frac{96}{25}R^2} = \frac{1}{2}$

3164.- Sobre dues diagonals d'un hexàgon regulars s'han dibuixat dos quadrats. Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$



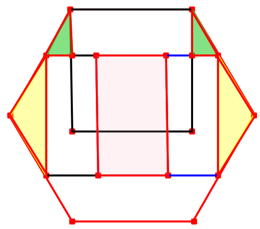
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle DFA = \angle PFD = 90°$
Aleshores, P, F, A estan alineats.
Anàlogament Q, C, B estan alineats.
Siga K la intersecció de les rectes FA, BC.



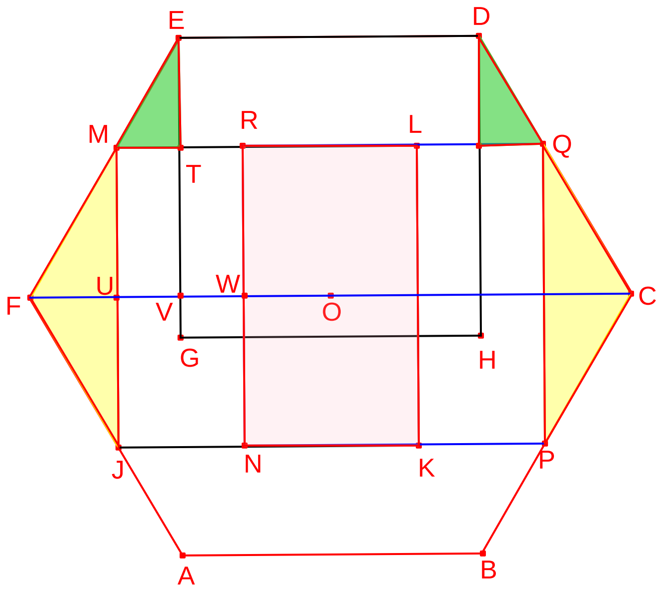
$\overline{FP} = \overline{FD} = \sqrt{3}$
El triangle $\overset{\Delta}{KAB}$ és equilàter:
El triangle $\overset{\Delta}{KPQ}$ és equilàter:
$\overline{PQ} = \overline{KP} = \overline{AK} + \overline{AF} + \overline{FP} = 1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$

3165.- En un hexàgon regular de costat 3 s'han dibuixat tres quadrats iguals.
Calculeu la proporció entre les regions:

$$\frac{rosa - verda}{groga}$$



Solució:



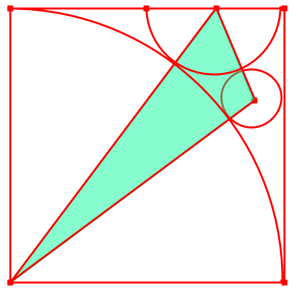
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 3$
Siguen els quadrats $DEGH, JKLM, NPQR$ de costat $\overline{CD} = 3$

$$\overline{MU} = \frac{3}{2}, \overline{FU} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{EV} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \overline{ET} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2}$$
$$\overline{FV} = \frac{3}{2}, \overline{UV} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

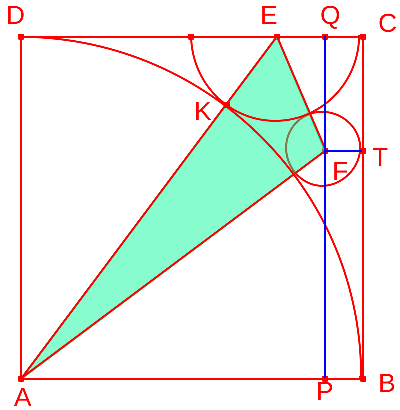
$$\overline{FC} = \overline{FU} + \overline{FV} + \overline{VW} + \overline{AB}$$
$$6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + \overline{VW} + 3$$
$$\overline{UW} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{WO} = 3 - \left(\frac{3}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{rosa - verda}{groga} = \frac{S_{NKLR} - 2 \cdot S_{MTE}}{2 \cdot S_{FJM}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)\frac{3\sqrt{3} - 3}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

3166.- En un quadrat de costat 36 s'ha dibuixat un quadrant, una semicircumferència i una circumferència. Els centres dels tres elements formen un triangle. Calculeu l'àrea del triangle.



Solució:



Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = 36$
Siga E el centre de la semicircumferència de radi $\overline{EC} = r$
Siga F el centre de la circumferència de radi $\overline{FT} = s$
$\overline{DE} = 36 - r, \overline{AE} = 36 + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$(36 + r)^2 = 36^2 + (36 - r)^2$
Simplificant:
$144r = 1296$
$r = 9$

Siga $\overline{CT} = a, \overline{BT} = 36 - a$
$\overline{EF} = r + s = 9 + s, \overline{EQ} = r - s = 9 - s, \overline{AF} = 36 + s, \overline{AP} = 36 - s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EQF}$
$(9 + s)^2 = (9 - s)^2 + a^2$
Simplificant:
$36s = a^2$
$a = 6\sqrt{s}$

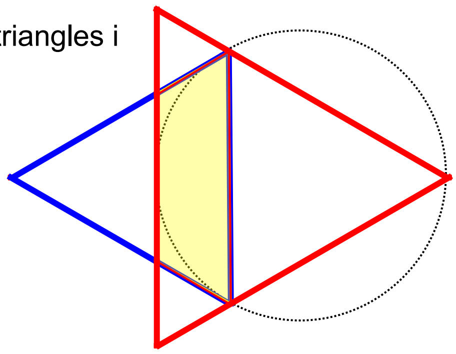
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APF}$
$(36 + s)^2 = (36 - s)^2 + (36 - a)^2$
Simplificant:
$144s = \left(36 - 6\sqrt{s}\right)^2$
Resolent l'equació:
$s = 4$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AFE}, \overline{AE} = 45, \overline{EF} = 13, \overline{AF} = 40$
Aplicant la fórmula d'Heró per a l'àrea:

$$S_{AFE} = \frac{\sqrt{98 \cdot 8 \cdot 18 \cdot 72}}{4} = 252$$

El triangle és Heronià.

3167.- A la figura hi ha dos triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l’àrea comuna dels dos triangles i l’hexàgon que formen els dos triangles.

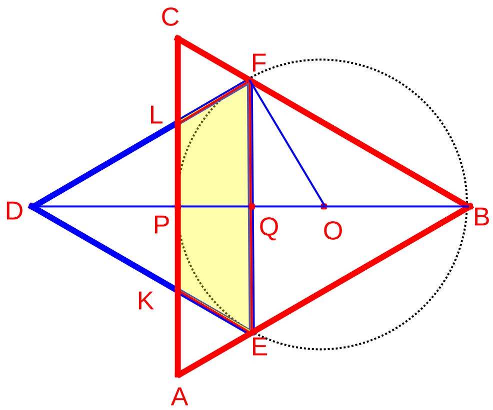


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = b$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = a$

Siga el quadrilàter $KEFL$ intersecció dels dos triangles equilàters.



$\overline{BF} = a$
$\overline{CF} = \overline{FL} = b - a$
$\overline{DL} = 2a - b$
Siga P el punt mig del costat $\overline{AC}$
Siga Q el punt mig del costat $\overline{EF}$
Siga O el centre de la circumferència que passa pels punts B, B, F

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{POF}$ és equilàter.

$$\overline{BQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\overline{OF} = \overline{OB} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \overline{OQ} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$\overline{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$\overline{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$b = \frac{4}{3}a$$

$$\overline{CF} = b - a$$

$$\overline{DL} = a - \overline{CF} = 2a - b = \frac{2}{3}a$$

L’àrea del quadrilàter $KEFL$ és:

$$S_{KEFL} = \frac{a + 2a - b}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{3 - \frac{4}{3}}{12}\sqrt{3}a^2 = \frac{5}{36}\sqrt{3}a^2$$

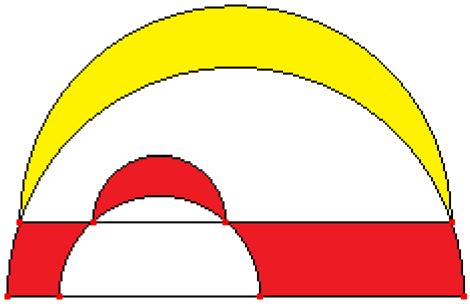
L’àrea de l’hexàgon $ABCLDK$ és:

$$S_{ABCLDK} = S_{ABC} + S_{DKL} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(2a - b)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{16}{9}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{4}{9}a^2 = \frac{20}{36}\sqrt{3}a^2$$

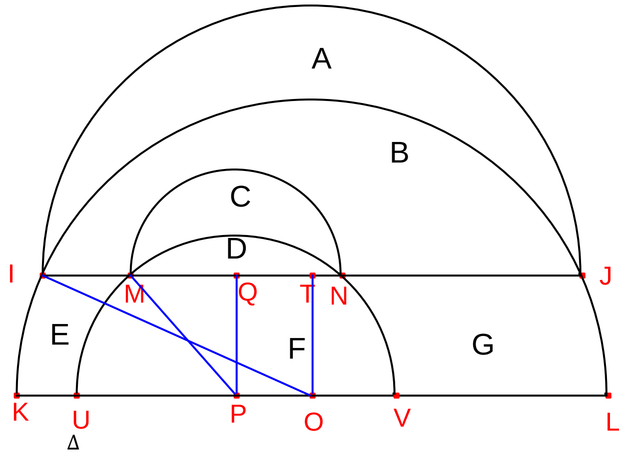
La proporció d’àrees és:

$$\frac{S_{KEFL}}{S_{ABCLDK}} = \frac{\frac{5}{36}\sqrt{3}a^2}{\frac{20}{36}\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{4}$$

3168.- Determineu la proporció entre les àrees de la zona groga i la zona roja.



Solució:



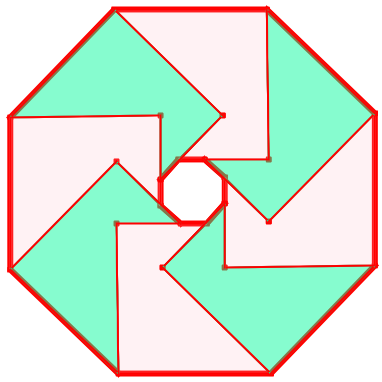
Dividim la figura en A, B, C, D, E, F, G parts.
Siga $\overline{OK} = \overline{OL} = R$
Siga $\overline{PU} = \overline{PV} = r$
Siga $\overline{QM} = \overline{QN} = s$
Siga $\overline{TI} = \overline{TJ} = t$
Siga $\overline{PQ} = a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ITO}$:
$a^2 = R^2 - t^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQM}$:
$r^2 = s^2 + a^2$
$r^2 = s^2 + R^2 - t^2$

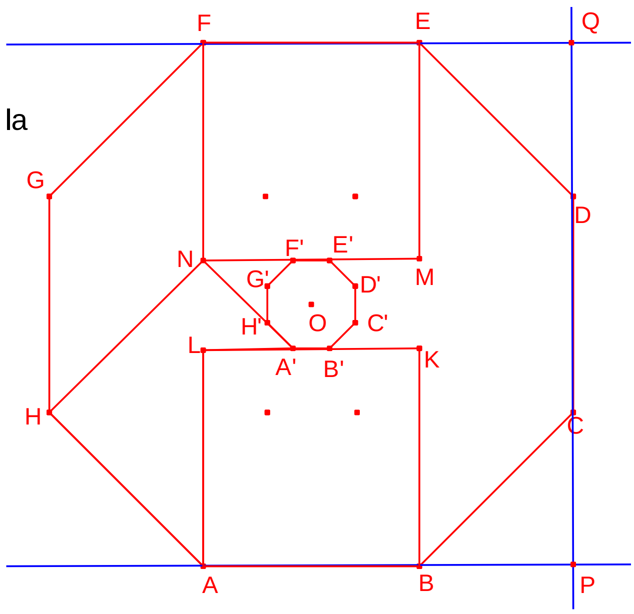
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{UV}$ és:
$\frac{1}{2}\pi r^2 = D + F$
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{MN}$ és:
$\frac{1}{2}\pi s^2 = D + C$
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{KL}$ és:
$\frac{1}{2}\pi R^2 = B + C + D + E + F + G$
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{IJ}$ és:
$\frac{1}{2}\pi t^2 = A + B + C + D$

$D + F = (D + C) + (B + D + D + E + F + G) - (A + B + C + D)$
Simplificant:
$C + E + G - A = 0$
La zona roja i la groga tenen la mateixa àrea.

3169.- En la figura sobre un octògon regular s'ha dibuixat vuit quadrats sobreposats.
Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon interior i l'exterior.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'octògon regular $A'B'C'D'E'F'G'H'$ de centre O.
Els dos octògons són homotètics de centre d'homotècia O.



Les àrees dels dos octògons són proporcionals a la seua raó d'homotècia.

Les rectes AB, CD es tallen en el punt P.
Les rectes FE, CD és tallen en el punt Q.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$\overline{PC} = \overline{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{PQ} = \overline{BE} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\overline{B'E'} = \overline{BE} - 2 \cdot \overline{BK} = \sqrt{2} - 1$$

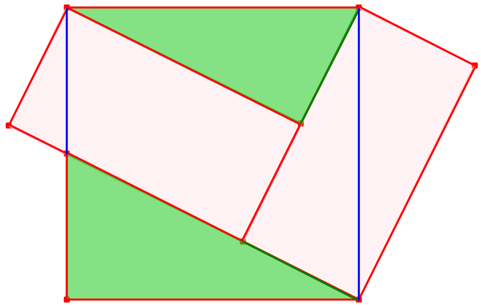
La raó de semblants dels dos octògons regulars és:

$$\frac{\overline{B'E'}}{\overline{BE}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'F'G'H'}}{S_{ABCDEFGH}} = \left(\frac{\overline{B'E'}}{\overline{BE}}\right)^2 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2} \approx 0.0294$$

3170.- En la figura, hi ha un quadrat i dos rectangles iguals.
Determineu la proporció entre les àrees de la zona verda i la zona rosa.



Solució.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DGC}, \overset{\Delta}{CFB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CG} = \overline{BF}$
Els rectangles $BECF, FGDH$ són iguals.
Aleshores, $\overline{GF} = \overline{BF}$
Aleshores, $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{BF}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DHM}, \overset{\Delta}{ANM}$ són iguals.
Aleshores, M és el punt mig del segment $\overline{HN}$

Podem dividit la figura en quadrats de costat $\overline{BF}$
Siga $S_{DHM} = P$.

$$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \frac{9P}{16P} = \frac{9}{16}$$