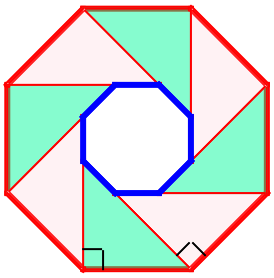
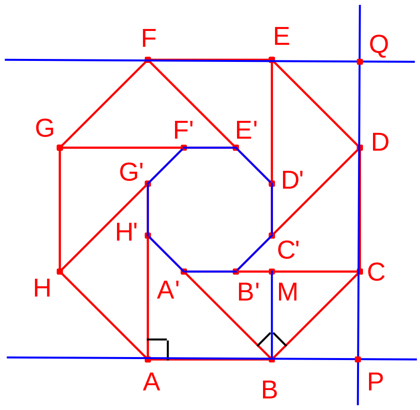
3171.- En la figura sobre un octògon regular s'ha dibuixat vuit triangles rectangles isòsceles iguals. Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon interior i l'exterior.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'octògon regular $A'B'C'D'E'F'G'H'$ de centre O.
Els dos octògons són homotètics de centre d'homotècia O.



Les àrees dels dos octògons són proporcionals a la seua raó d'homotècia.

Les rectes AB, CD es tallen en el punt P.
Les rectes FE, CD és tallen en el punt Q.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$\overline{PC} = \overline{DQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\overline{PQ} = \overline{BE} = 1 + \sqrt{2}$$

Siga M el punt mig del segment$\overline{A'C}$

$$\overline{BM} = \overline{PC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\overline{B'E'} = \overline{BE} - 2 \cdot \overline{BM} = 1$$

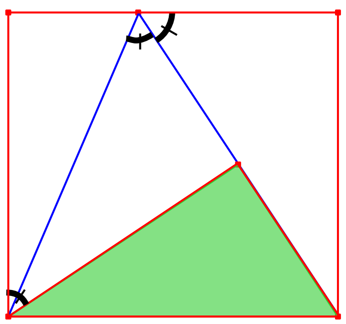
La raó de semblants dels dos octògons regulars és:

$$\frac{\overline{B'E'}}{\overline{BE}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$$

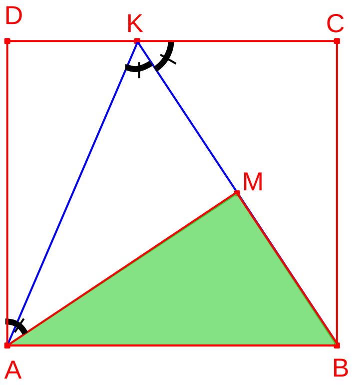
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'F'G'H'}}{S_{ABCDEFGH}} = \left(\frac{\overline{B'E'}}{\overline{BE}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$$

3172.- Els tres angles marcats de la figura són iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle exterior.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = c, \overline{AD} = 1$
Siguen $\alpha = \angle MAD = \angle AMB = \angle CKM$
$\angle DKA = 180° - 2\alpha$
$\angle DAK = 2\alpha - 90°$
$\angle AKM = \alpha - (2\alpha - 90°) = 90° - \alpha$
$\angle AMK = 90°$
$\angle ABM = \alpha$



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és isòsceles, per tant M és el punt mig de $\overline{BK}$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCK}, \overset{\Delta}{AMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

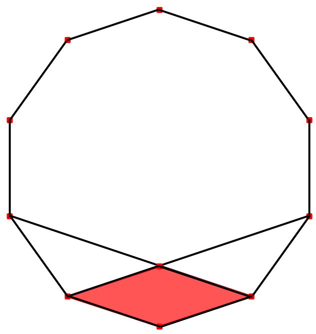
$$\frac{1}{\overline{AM}} = \frac{2 \cdot \overline{BM}}{a}$$

$$\overline{AM} \cdot 2 \cdot \overline{BK} = a$$

La proporció d'àrees és:

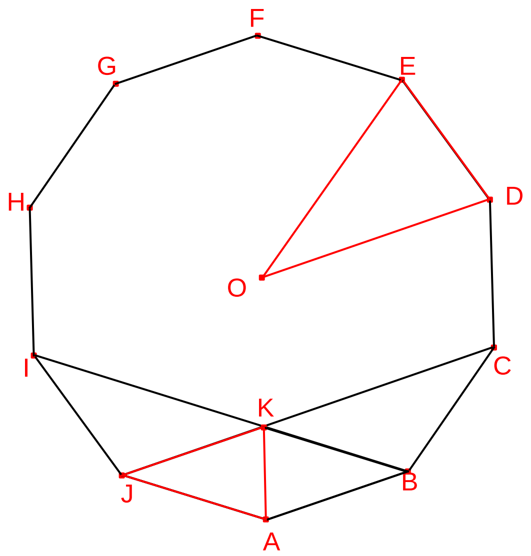
$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{BK}}{a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{4}$$

3173.- En un decàgon regular s'han traçat dues diagonals.
Determineu la raó entre les àrees de la zona ombrejada i la del decàgon regular.

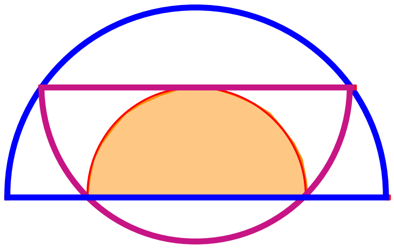


Solució:
Siga $ABCDEFGHIJ$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
$\angle DOE = 36°$
$\overline{OD} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\angle CJA = 36°$
$\overline{AK} = \frac{1}{\Phi}$
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{AKJ}, \overset{\Delta}{DEO}$ són semblants i de raó $\frac{1}{\Phi}:1$
Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó:
$\frac{S_{AKJ}}{S_{DEO}} = \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{ABKJ}}{S_{ABCDEFGHIJ}} = \frac{2 \cdot S_{AKJ}}{10 \cdot S_{DEO}} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{10} \approx 0.0764$

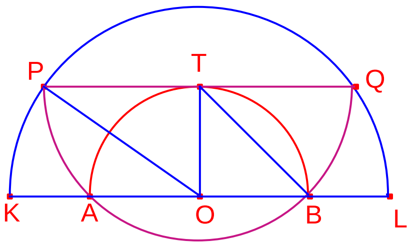


3174.- En la figura, hi ha tres semicircumferències. Determineu la proporció entre les àrees de la semicircumferència ombrejada i la semicircumferència gran.



Solució:
Siga la semicircumferència ombrejada de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OT} = r$
Siga la semicircumferència gran de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OP} = R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TOB}$:
$\overline{TB} = \overline{TP} = r\sqrt{2}$

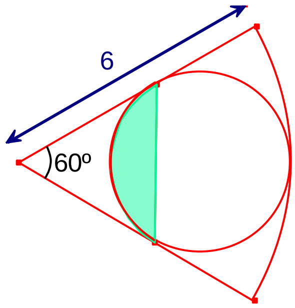


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTO}$:
$R^2 = r^2 + 2r^2$
$R^2 = 3r^2$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_r}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot r^2}{\frac{1}{2}\pi \cdot R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r^2}{3r^2} = \frac{1}{3}$$

3175.- En un sector circular de 60º i radi 6 s'ha inscrit una circumferència.
Calculeu l'àrea del segment circular format pels dos punts de tangència de la circumferència i els radis del sector.

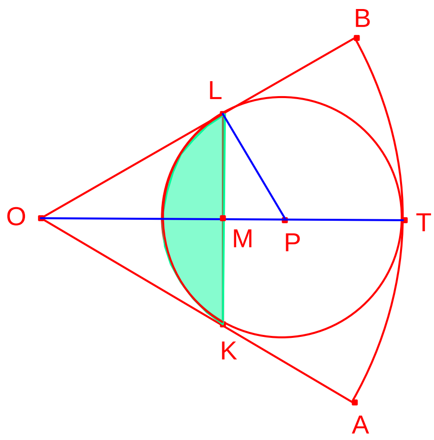


Solució:
Siga el sector circular de centre O radi $\overline{OA} = 6$ i $\angle AOB = 60°$.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PL} = r$ inscrita en el sector.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{KL}$

$\angle OLP = \angle OKP = 90°$

$\angle LPK = 120°$

$\angle LPM = 60°$



$\overline{OP} = 6 - r$

$$\frac{\overline{PL}}{\overline{OP}} = \frac{1}{2}$$

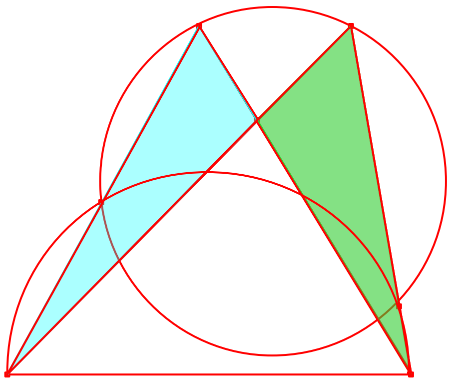
$$\frac{r}{6 - r} = \frac{1}{2}$$

Resolent l'equació:
$r = 2$

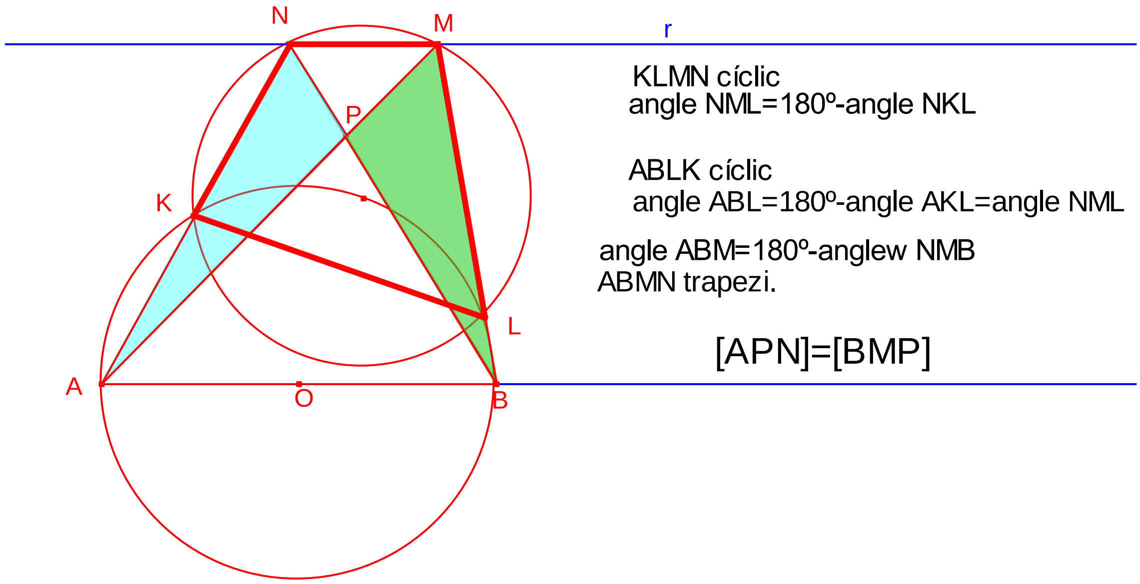
El segment circular ombrejat té 120º.
L'àrea és igual a l'àrea del sector de 120º i radi $r = 2$ menys l'àrea d'un triangle equilàter de costat $r = 2$:

$$S = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.4567$$

3176.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles ombrejats.



Solució:



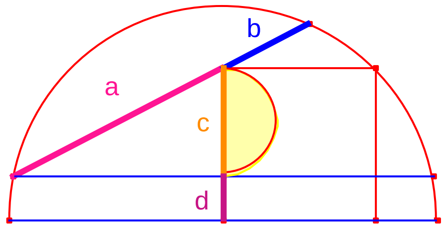
KLMN cíclic
angle NML=180º-angle NKL

ABLK cíclic
angle ABL=180º-angle AKL=angle NML

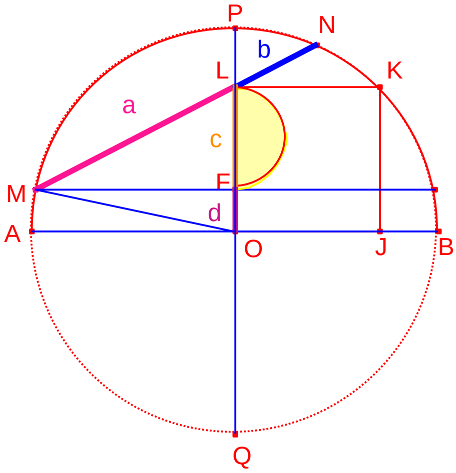
angle ABM=180º-anglew NMB
ABMN trapezi.

[APN]=[BMP]

3177.- En la figura, $a:b = c:d$
Calculeu la proporció entre les àrees del semicercle ombrejat i el semicercle exterior.



Solució:



a=bk, c=dk
OA=R=(1+k)d·sqrt(2)

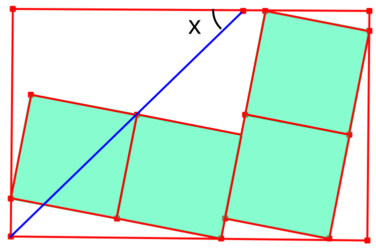
Teorema Pitàgores OFM, LFM

$R^2-d^2=a^2-c^2$
$(3k^2+4k+1)\cdot d^2=k^2\cdot b^2$

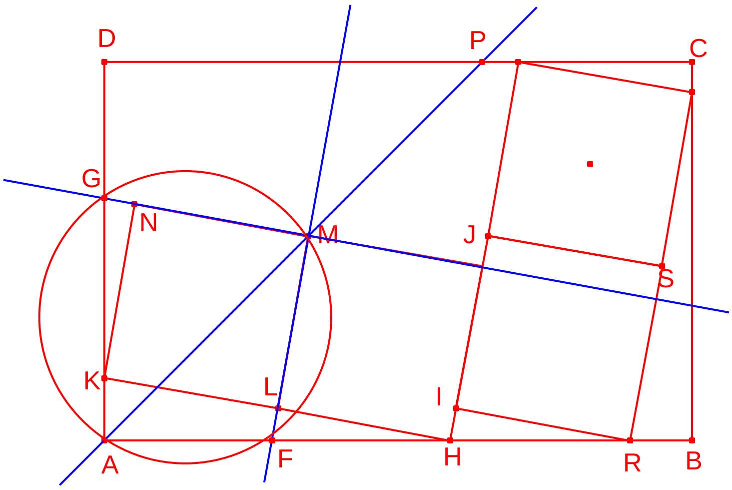
Potència L respecte circumferència
ab=(R-(c+d))·(R+(c+d))
$k\cdot b^2=(1+k)^2\cdot d^2$
$k^3-k^2-3k-1=0$
k=1+sqrt(2)

Prop àrees:
$c^2/R^2=k^2/(2(1+k)^2)=1/16$

3178.- Els quatre quadrats interiors al rectangle són iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

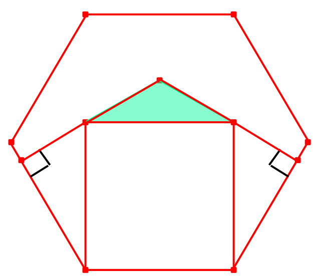


Siga el rectangle $ABCD$.
Siguen els quadrats $KLMN, IRSJ$
Els triangles rectangles.
Siga la recta AM que talla el costat $\overline{CD}$ en el punt P
Siga $x = \angle APD$

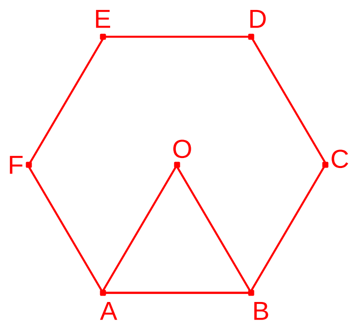
La recta MN talla el costat $\overline{AD}$ en el punt G
La recta LM talla el costat $\overline{AB}$ en el punt F.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{RIH}, \overset{\Delta}{HLF}, \overset{\Delta}{KNG}$ són iguals.
$\overline{MG} = \overline{MF}$
El quadrilàter $AFMG$ és cíclic ja que té els angles oposats suplementaris.

$\angle GAM = \angle GFM = 45°$
Siga $x = \angle APD = 90° - \angle GAM = 45°$

3179.- Sobre el costat d'un hexàgon regular s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O.
$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{ABO}$

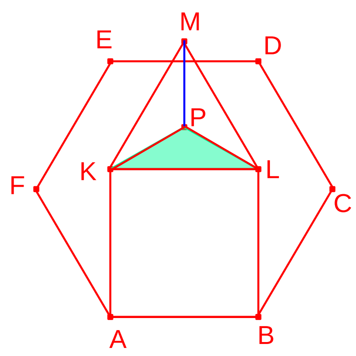


Siga el quadrat $ABLK$

Siga el triangle ombrejat $\overset{\Delta}{KLP}$
Notem que és isòsceles i $\angle LPK = 120°$

Dibuixem el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de centre P

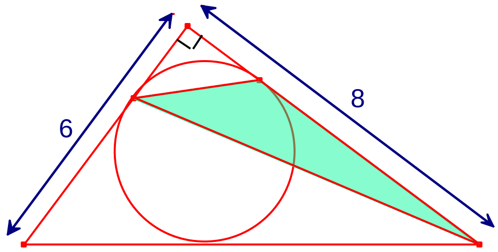
Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{KLM}, \overset{\Delta}{ABO}$ són iguals.
$S_{KLP} = \frac{1}{3} S_{KLM}$



La proporció d'àrees és:

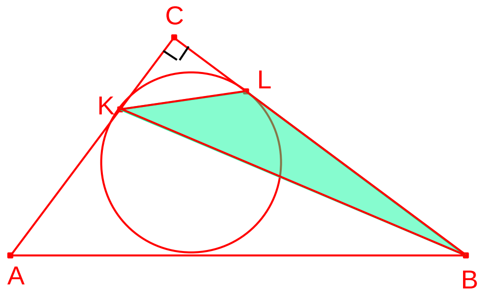
$$\frac{S_{KLP}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{1}{3} S_{ABO}}{6 \cdot S_{ABO}} = \frac{1}{18}$$

3180.- Donat el triangle rectangle de catets 6, 8 determineu l'àrea del triangle ombrejat format per els punts de tangència de la circumferència inscrita amb els catets i un angle agut del triangle equilàter.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, a = 8, b = 6$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle:
$c = 10$



Siguen K, L els punts de tangència dels catets amb la circumferència inscrita al triangle rectangle.

$\overline{CK} = \overline{CL} = \dfrac{a+b-c}{2} = 2$

Aleshores:

$\overline{AK} = 4, \overline{BL} = 6$

L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{KLB}$ és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{KCL}, \overset{\Delta}{AKB}$

$S_{KCL} = \dfrac{1}{2}\overline{CK} \cdot \overline{CL} = 2$

$S_{AKB} = \dfrac{1}{2}\overline{AK} \cdot a = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLB}$ és:

$S_{KLB} = S_{ABC} - (S_{KCL} + S_{AKB}) = 24 - (2 \cdot 16) = 6$