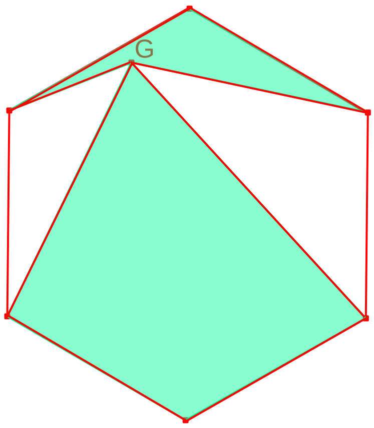
3181.- Siga G un punt interior d'un hexàgon regular.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

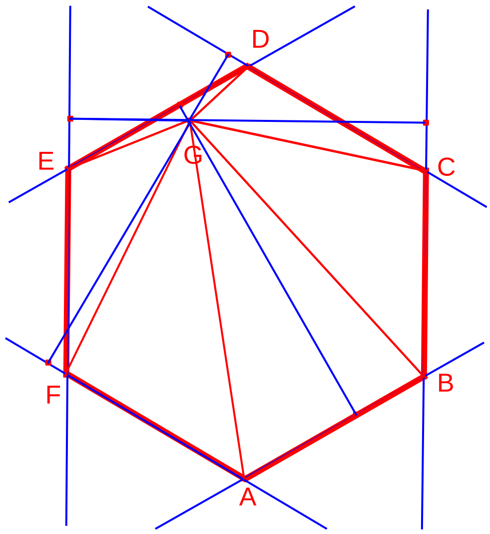
Siga G el punt interior a l'hexàgon regular.
Unim el punt G amb els vèrtexs de l'hexàgon regular.

$$S_{ABG} + S_{DEG} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

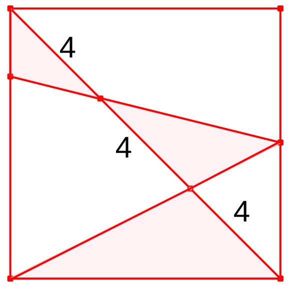
$$S_{CDG} + S_{AFGG} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$



3182.- La diagonal d'un quadrat s'ha dividit en tres parts iguals de mesura 4.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

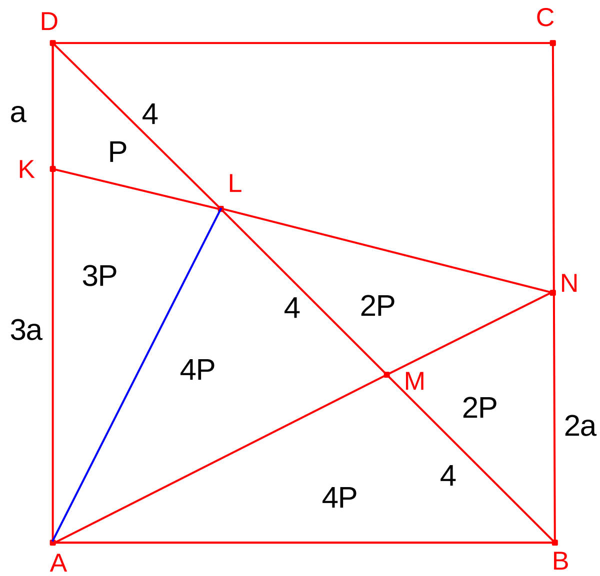


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$, $\overline{BD} = 12$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 = 72$

Siguen L, M de la diagonals tal que $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MB} = 4$.
Els triangles $\overset{\Delta}{DKL}, \overset{\Delta}{BNL}$ són semblants i de raó 1:2
Siga $\overline{DK} = a$
Aleshores, $\overline{BN} = 2a$

Els triangles $\overset{\Delta}{DAM}, \overset{\Delta}{BNM}$ són semblants i de raó 2:1
Aleshores, $\overline{AD} = 4a$
Aleshores, N és el punt mig del costat $\overline{BC}$



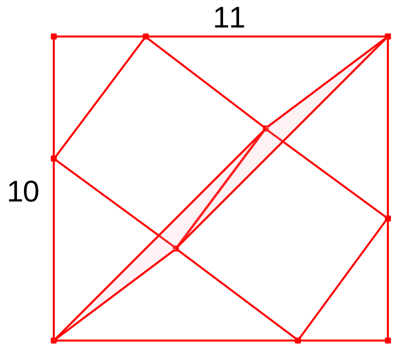
Siga $S_{DKL} = P$
$S_{BNL} = 4P$
$S_{LMN} = S_{MBN} = 2P$

$\overline{AK} = 3a$
$S_{AKL} = 3 \cdot S_{DKL} = 3P$
$S_{MLA} = S_{BMA} = S_{LDA} = 4P$

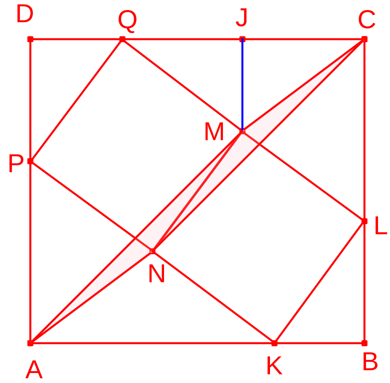
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot 12P = 24P$
$S_{ombrejada} = 7P$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{7P}{24P} = \frac{7}{24}$$

L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = \frac{7}{24} \cdot 72 = 21$$

3183.- En un rectangle 11×10 s'han inscrit dos quadrats iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 11, \overline{AD} = 10$.
Siguen els quadrats $KLMN, MNPQ$ de costat $\overline{KL} = c$
Siguen $\overline{DP} = a, \overline{DQ} = b$
$\overline{AP} = \overline{CL} = 10 - a, \overline{CQ} = \overline{AK} = 11 - b$

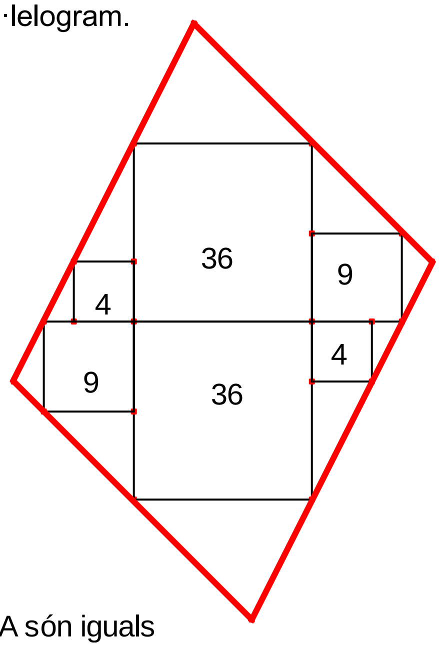


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}, \overset{\Delta}{KAP}$ són semblants i de raó 1:2
Aplicant el teorema de Tales:
$10 - a = 2b$
$11 - b = 2a$
Considerem els sistema:
$\begin{cases} a + 2b = 10 \\ 2a + b = 11 \end{cases}$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$
$c = 5$
Siga J la projecció de M sobre el costat $\overline{CD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}, \overset{\Delta}{QJM}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{QJ} = 4, \overline{CJ} = 11 - (3 + 4) = 4$
Aleshores, els triangles rectangle $\overset{\Delta}{PDQ}, \overset{\Delta}{CJM}$ són iguals.
$\overline{CM} = c = 5$
Siga $\angle JMQ = \alpha$
$\angle CMN = 270° - 2\alpha$
L'àrea ombrejada és:

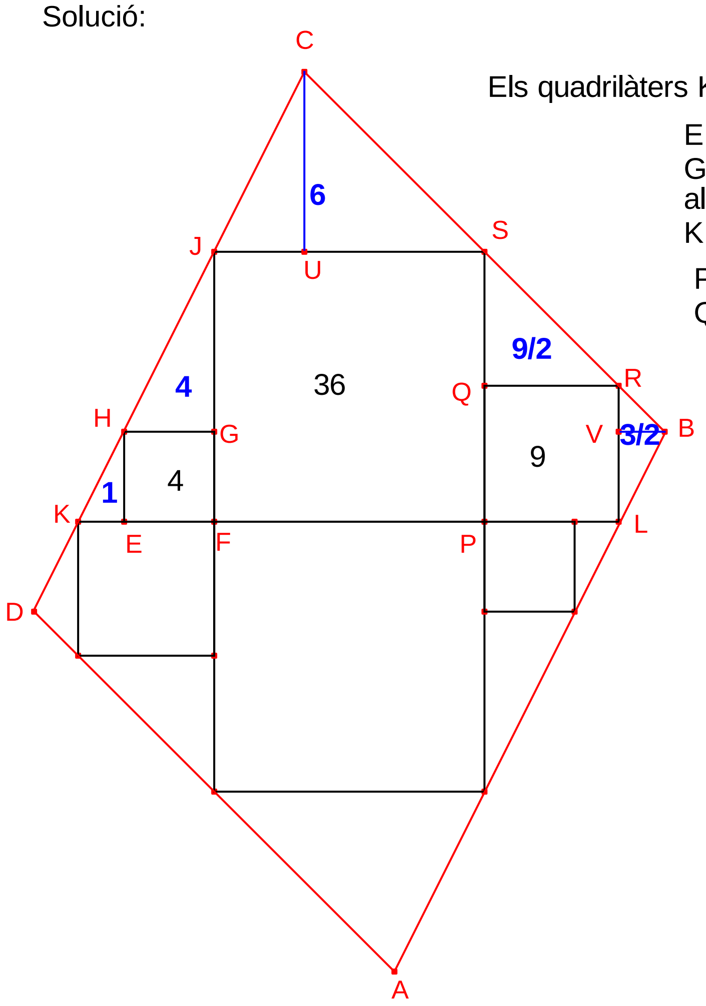
$$S_{ANCM} = 2 \cdot S_{NMC} = 2 \cdot \frac{1}{2} 5^2 \cdot \sin(270° - 2\alpha) = -25 \cdot \cos 2\alpha = -25(2 \cdot \cos^2 \alpha - 1)$$

$$S_{ANCM} = 2 \cdot S_{NMC} = -25\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1\right) = 7$$

3184.- Sis quadrats d'àrees 4, 36, 9 tenen circumscrit un paral·lelogram. Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:



Els quadrilàters KLBC, LKDA són iguals

EF=EH=FG=2
GJ=4
aleshores,
KE=1

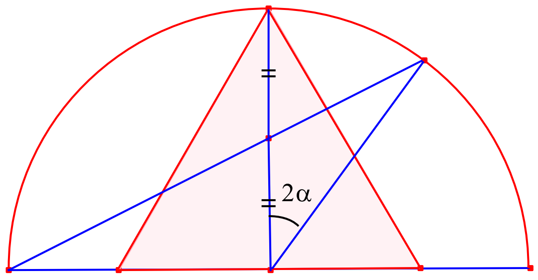
PL=PQ=LR=3
QS=3

JU=a, CU=2a, US=2a
Aleshores,
JU=2, CU=4

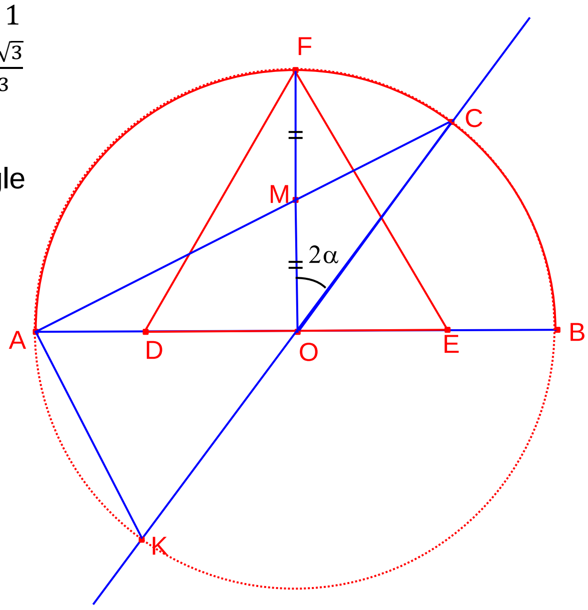
RV=b, VB=b, VL=3b
Aleshores,
VB=1

[ABCD]=2·72=144

3185.- En una semicircumferència s'ha dibuixat un triangle equilàter.
L'altura del triangle equilàter s'ha dividit en dues parts iguals.
Calculeu $\sin\alpha + \cos\alpha$

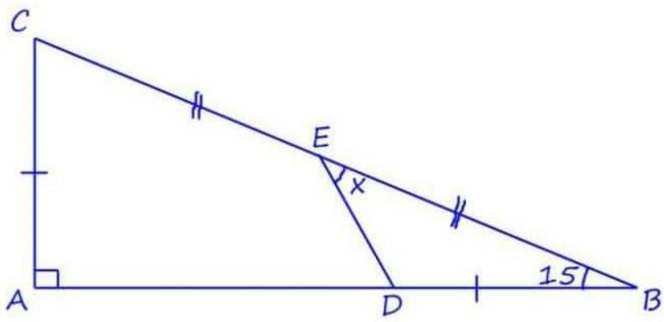


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $c = \overline{DE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
Siga M el punt mig de l'altura $\overline{OF}$
Siga $2\alpha = \angle COF$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$:

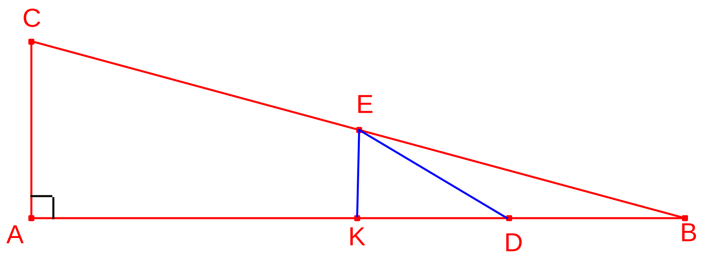


$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
Aplicant la potència del punt M respecte de la circumferència de centre O i radi R:
$$\overline{AM}\cdot\overline{CM} = \overline{MF}\cdot(2R - \overline{MF})$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\overline{CM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$
$$\overline{CM} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$
$$\overline{AC} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$
La recta OC talla la circumferència en el punt K.
$$\angle KAC = 90°$$
$$\angle AKC = \frac{90° + 2\alpha}{2} = 45° + \alpha$$
$$\sin(45° + \alpha) = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\sin(45° + \alpha) = \sin 45°\cdot\cos\alpha + \cos 45°\cdot\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

3186.- En la figura, calculeu la mesura de l’angle x



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, B = 15°$
Siguen els punts D, E dels costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament tal que $\overline{BD} = \overline{AC} = x, \overline{CE} = \overline{BE} = y$

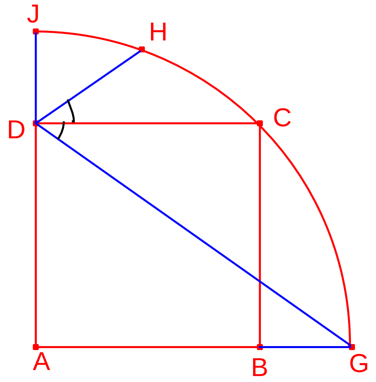
Siga K la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBE}$ són semblants i de raó 2:1
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{AK} = \overline{BK} = z, \overline{EK} = \frac{1}{2}x$$

$$\frac{x}{2z} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$
$$2z = (2 + \sqrt{3})x$$
$$\overline{DK} = z - x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}x - x = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Aleshores, $\angle KED = 60°$
$\angle KEB = 75°$
Aleshores, $x = \angle DEB = 75° - 60° = 15°$

3187.- Siga el quadrat $ABCD$ inscrit en el quadrant circular.
Siga $\angle HDC = \angle CDG$
Calculeu
$\dfrac{\overline{DG}}{\overline{DH}}$

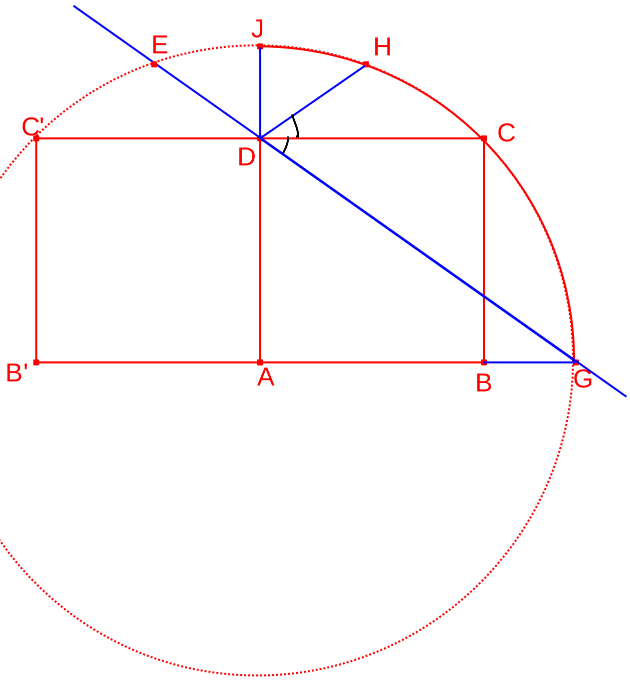


Solució:
Siga la circumferència de centre A i radi $\overline{AG} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAG}$:

$$\overline{DG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Siga el quadrat $ADC'B'$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDJ}, \overset{\Delta}{C'DJ}$ són iguals.
$\angle EDC' = \angle CDG$ són iguals. Aleshores:
Els triangles $\overset{\Delta}{DCH}, \overset{\Delta}{C'DE}$ són iguals.
Aleshores:
$\overline{DE} = \overline{DH}$
Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència:

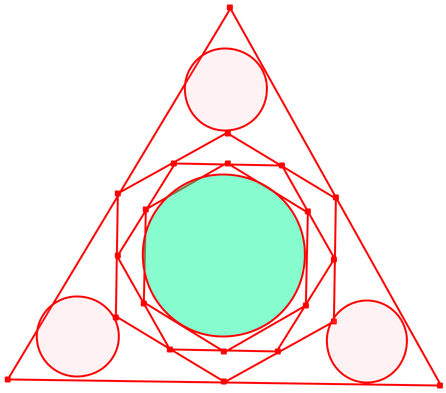
$$\overline{DE} \cdot \overline{DG} = \overline{DC} \cdot \overline{DC'}$$

$$\overline{DH} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{DH} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{6}} = 3$$

3188.- En la figura, hi ha quatre cercles i tres hexàgons regulars dins d'un triangle equilàter. Calculeu la proporció de les àrees rosa i verda.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O i costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència verda de centre O i radi $\overline{OT} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PF} = r$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
$\overline{OM} = \overline{OF} = a$
Aleshores, $\overline{AF} = a$

$$3a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$r = \frac{1}{3}a$$

$$\overline{NJ} = \sqrt{3} \cdot a$$

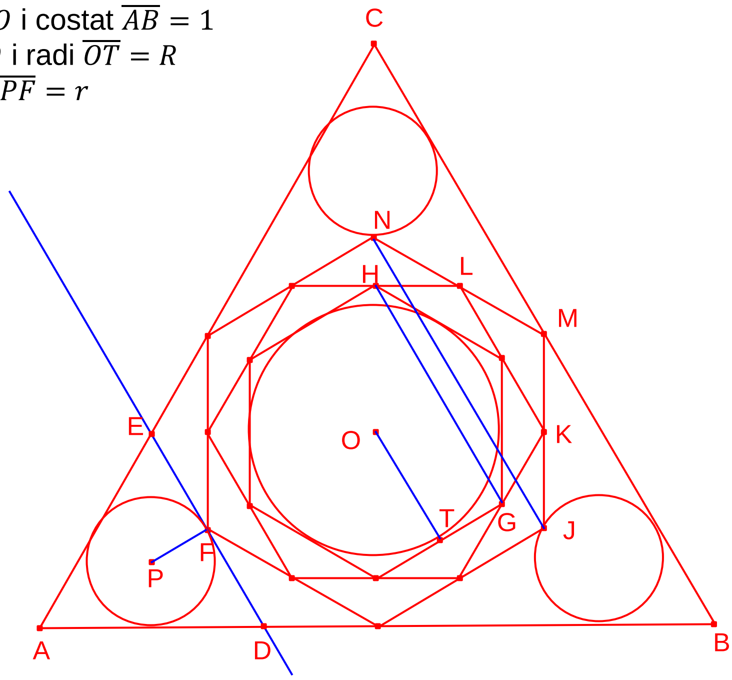
$$\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{NJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\overline{GH} = \frac{3}{2}\overline{LK} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$

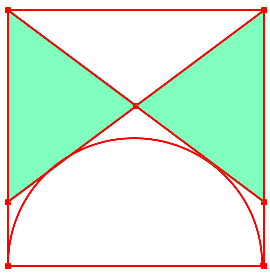
$$R = \overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{GH} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$$

La proporció d'àrees és:

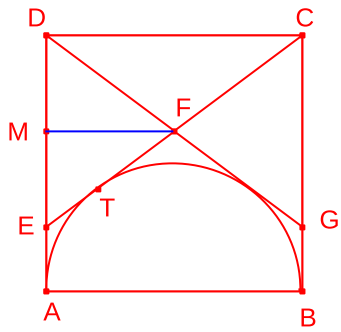
$$\frac{S_{rosa}}{S_{verda}} = \frac{3 \cdot \pi r^2}{\pi R^2} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a\right)^2} = \frac{64}{81}$$



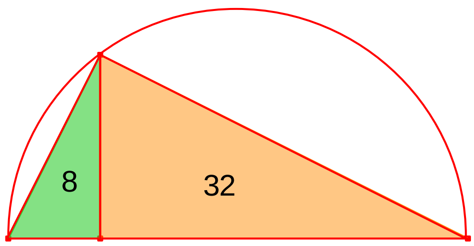
3189.- Sobre un costat d'un quadrat com diàmetre s'ha dibuixat una semicircumferència
Pels altres dos vèrtexs del quadrat s'ha dibuixat dues tangents a la semicircumferència.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEF}$
Siga $\overline{DE} = x$
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.
$\overline{MF} = \frac{1}{2}$
Siga T el punt de tangència de la recta CE i la semicircumferència.
$\overline{CT} = \overline{CD} = 1, \overline{ET} = \overline{EA} = 1 - x$
$\overline{CE} = 2 - x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$(2-x)^2 = 1 + x^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{3}{4}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{DEF} = x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$



3190.- En una semicircumferència s'han dibuixat dos triangles rectangles d'àrees 8 i 32. Determineu l'àrea del semicercle.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AD}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CBD}$ són semblants.

La raó de proporcionalitat és igual a l'arrel quadrat de la proporció de les àrees:

La raó és $1:2$

Siga $\overline{AB} = a$

Aleshores, $\overline{BC} = 2a, \overline{BD} = 4a$

$\overline{AB} = 5a$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 8:

$a^2 = 8$

L'àrea del semicercle és:

$S_O = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{5a}{2}\right)^2 = \frac{25}{8}\pi \cdot a^2 = 25\pi$