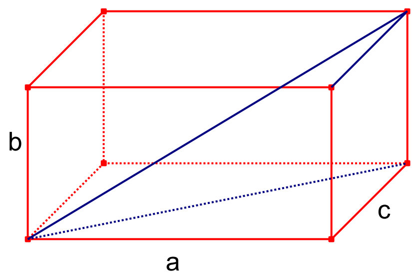
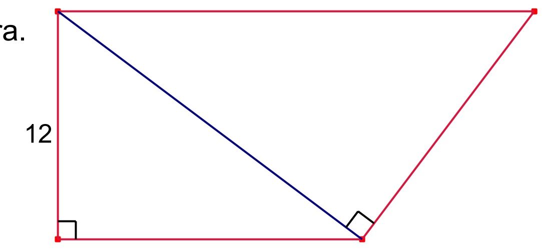
Problemes de Geometria per a l'ESO 32

311.- L'àrea d'un prisma rectangular recte (ortoedre) és 22. Si la suma de les arestes és 24.
Determineu la mesura de la diagonal del prisma.
Proves Cangur 2011, nivell 3. Problema 29.



Solució:
Siga l'ortoedre d'arestes a, b, c.
Per hipòtesi la suma de les arestes és 24:
$4(a+b+c)=24$. Simplificant:
$a+b+c=6$ (1)
Per hipòtesi l'àrea de l'ortoedre és 22:
$2(ab+ac+bc)=22$ (2)
Aplicant el teorema de Pitàgores la diagonal de l'ortoedre és:
$d^2=a^2+b^2+c^2$ (3)
Elevant al quadrat l'expressió (1):
$6^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ (4)
Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (4):
$6^2=d^2+22$.
$d^2=14$.
$d=\sqrt{14}$.

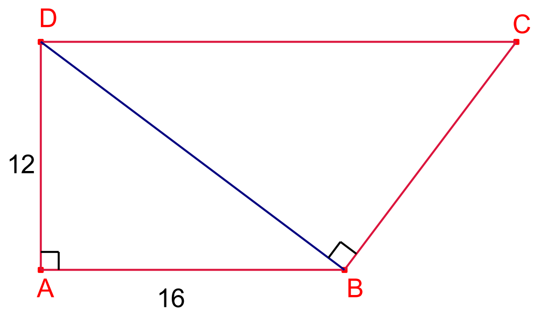
312.- Hem construït un trapezi juxtaposant dos triangles rectangles semblants com els de la figura. Calculeu l'àrea del trapezi.
Proves Cangur, nivell 2. Problema 30.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.



Per hipòtesi els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BDC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$. $\frac{12}{16} = \frac{\overline{BC}}{20}$.

$\overline{BC} = 15$.

L'àrea del trapezi és la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BDC}$:

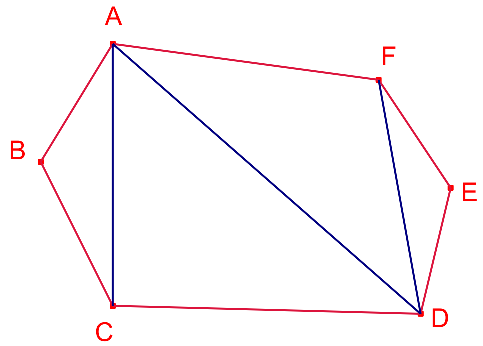
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{12 \cdot 16}{2} + \frac{15 \cdot 20}{2} = 246.$$

313.- En qualsevol hexàgon ABCDEF

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}>\frac{2}{3}\left(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}\right).$$

M.N. Aref. "Problems and Solutions in Euclidean Geometry".

Solució:



Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$\overline{AF}+\overline{FD}>\overline{AD} \qquad (1)$$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{DEF}$:

$$\overline{DE}+\overline{EF}>\overline{FD} \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$\overline{FA}+\overline{DE}+\overline{DE}>\overline{AD} \qquad (3)$$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\overline{AC}+\overline{CD}>\overline{AD} \qquad (4)$$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC} \qquad (5)$$

Sumant les expressions (4) (5):

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{AD} \qquad (6)$$

Sumant les expressions (3) (6):

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}>2\cdot\overline{AD} \qquad (7)$$

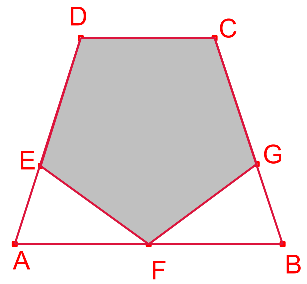
Anàlogament:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}>2\cdot\overline{BE} \qquad (8)$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}>2\cdot\overline{CF} \qquad (9)$$

Sumant les expressions (7) (8) (9):

$$3\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FA}\right)>2\left(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}\right).$$



314.- En la figura hi ha un petàgon regular CDEG inscrit en un trapezi ABCD.

Demostreu que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$.

UKMT "Cayley" 2011.

Solució:

L'angle interior del pentàgon és:

$\angle DEB = 108^\circ$.

$\angle AEB = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ (1)

El trapezi ABCD és isòsceles, aleshores:

$\angle DAB = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ (2)

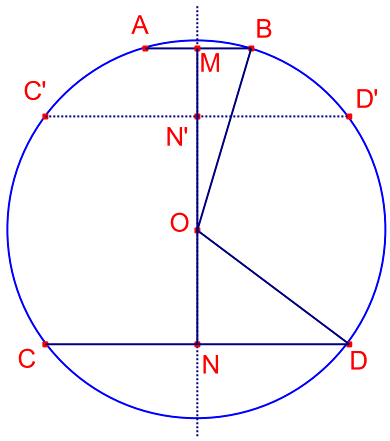
De les expressions (1) i (2) deduïm que el triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.

Aleshores, $\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{CD}$.

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AF} = 2 \cdot \overline{CD}$.

315.- En una circumferència de radi 50 hi ha dues cordes paral·leles de 28 i 80. Determineu la distància entre les dues cordes.
Kutepov, problema 45.

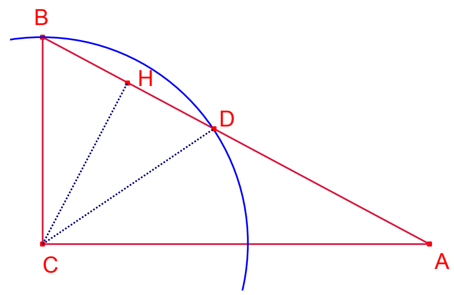
Solució
Siga la circumferència de centre O i radi 50.
Siga la corda $\overline{AB} = 28$, hi ha dues cordes paral·leles a $\overline{AB}$ tal que mesuren 80.
Siga $\overline{CD} = 80$ tal que el centre O està entre les dues cordes.
Siga $\overline{C'D'} = 80$ tal que el centre O no està entre les dues cordes.
Per ser les dues cordes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ la mediatriu a les dues cordes passa pel centre O.
Siga M el punt mig de $\overline{AB}$, i N el punt mig de $\overline{CD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBM}$:
$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{MB}^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODN}$:
$\overline{ON} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{ND}^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$.
La distància entre les dues cordes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ és:
$\overline{MN} = \overline{OM} + \overline{ON} = 48 + 30 = 78$

Siga N' el punt mig de la corda $\overline{C'D'}$.
$\overline{ON} = \overline{ON'}$.
La distància entre les dues cordes $\overline{AB}$, $\overline{C'D'}$ és:
$\overline{MN'} = \overline{OM} - \overline{ON'} = 48 - 30 = 18$.

316.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{\circ}$ de catets $\overline{AC} = 30$, $\overline{BC} = 16$.
Fent centre en C es dibuixa una circumferència de radi $\overline{CB}$ que talla la hipotenusa en el punt D. Calculeu la mesura del segment $\overline{BD}$.
Kutepov, problema 39.



Solució:

$\overline{CD} = \overline{BC} = 16$. Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AB} = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34$.

Siga $\overline{CH}$ l'altura sobre la hipotenusa.

$\overline{CH}$ és altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCD}$, aleshores, $\overline{BH} = \overline{DH}$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$S_{ABC} = \frac{30 \cdot 16}{2} = \frac{34 \cdot \overline{CH}}{2}$. Resolent l'equació:

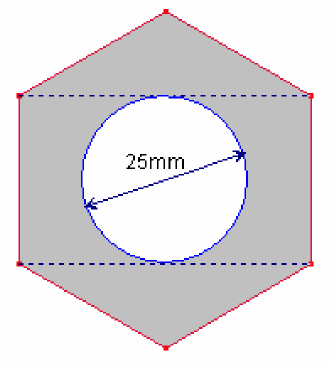
$\overline{CH} = \frac{240}{17}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCH}$:

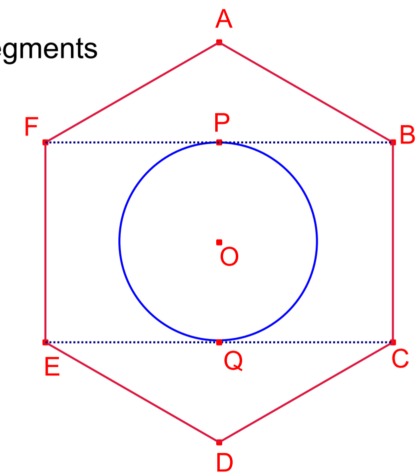
$\overline{BH} = \sqrt{16^2 - \left(\frac{240}{17}\right)^2} = \frac{128}{17}$.

$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BH} = \frac{256}{17}$.

317.- Calculeu l'àrea de la secció d'una rosca.
Kutepov, problema 103.



Solució:
Siga ABCDEF l'hexàgon exterior de la rosca.
Siguen P i Q els punts de tangència de la circumferència i els segments $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, respectivament.
$\overline{PQ}=25$ .aleshores, $\overline{FE}=\overline{PQ}=25$.



El radi de la circumferència és $\overline{OP}=\frac{25}{2}$.
L'àrea de la secció de la rosca és igual a l'àrea de l'hexàgon menys l'àrea del cercle.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{FEO}$ és:

$$S_{FEO}=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{FE}^2=\frac{25^2\sqrt{3}}{4}=\frac{625\sqrt{3}}{4}.$$

L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és:

$$S_{ABCDEF}=6\left(\frac{625\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1875}{2}\sqrt{3}.$$

L'àrea del cercle de radi $\frac{25}{2}$ és:

$$S_{cercle}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2=\frac{625\pi}{4}.$$

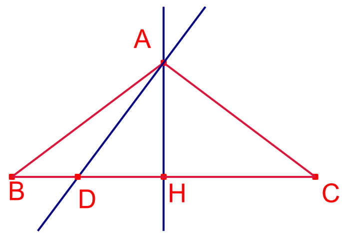
L'àrea de la secció de la rosca és:

$$S_{rosca}=\frac{1875}{2}\sqrt{3}-\frac{625\pi}{4}\approx 1132'92\text{mm}^2\approx 11'33\text{cm}^2.$$

318.- En un triangle isòsceles obtusangle des del vèrtex de l'angle obtús es traça una perpendicular a un dels costats iguals que talla el costat desigual en dos segments.
Si el costat desigual del triangle mesura 32 i l'altura sobre el costat desigual 12.
Determineu la longitud en què queda dividit el costat desigual per la perpendicular.
Kutepov, problema 53.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 32$.
Siga $\overline{AH} = 12$ altura del triangle.



$\overline{CH} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{32}{2} = 16$.

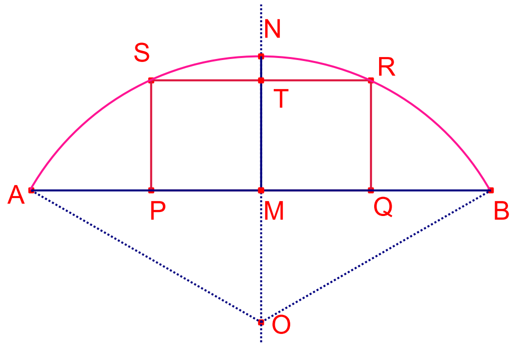
Els triangles $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{DHA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$, $\frac{\overline{DH}}{12} = \frac{12}{16}$. Aleshores, $\overline{DH} = 9$.

$\overline{CD} = \overline{CH} + \overline{DH} = 16 + 9 = 25$.

$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 32 - 25 = 7$.

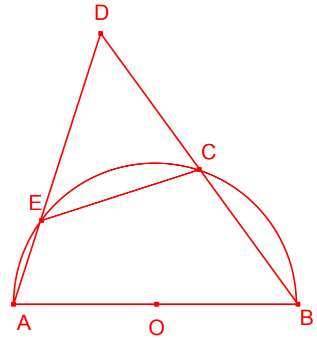
319.- Un rectangle que la base mesura el doble que l'altura està inscrit en un segment circular de 120º i altura h.
Quant mesura el perímetre del rectangle.
Kutepov, problema 54.



Solució:

Siga $\overset{\frown}{AB}$ un arc de 120, centre O i radi r, $\angle AOB = 120^\circ$.
Siga $\overline{MN} = h$ altura del segment circular.
$\angle BAO = 30^\circ$, aleshores, $\overline{OM} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{r}{2}$.
$r = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = \frac{r}{2} + h$.
Aleshores, $r = 2h$.
Siga PQRS el rectangle inscrit en arc, tal que $\overline{PS} = x$, $\overline{PQ} = 2x$.
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTR}$:
$\overline{OR} = r = 2h$, $\overline{TR} = x$, $\overline{OT} = \overline{OM} + \overline{MT} = h + x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OTR}$:
$(2h)^2 = x^2 + (h + x)^2$.
Resolent l'equació en la incògnita x:
$x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} h$.
El perímetre del rectangle PQRS és:
$P_{PQRS} = 6x = 3h\left(-1 + \sqrt{7}\right)$.

Ricard Peiró i Estruch



320.- En la figura $\overline{CD} = \overline{BC}$, $\angle BAD = 72^\circ$ i $\overline{AB}$ és el diàmetre del semicercle de centre O.
Determineu la mesura de l'angle $\angle DEC$.
Olimpíada Brasilera primera fase 2011, nivell 3.

Solució:
Per ser E un punt de la circumferència i $\overline{AB}$ el diàmetre, $\angle AEB = 90^\circ$.
Aleshores, $\angle BED = 90^\circ$.
$\angle ABE = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$

$\overset{\Delta}{BED}$ és rectangle i C és el punt mig de la hipotenusa $\overline{BD}$, aleshores, $\overline{CE} = \dfrac{\overline{BD}}{2}$.

Aleshores, $\overline{CE} = \overline{BC}$.
Aleshores, els arcs que abracen les cordes són iguals.
Aleshores, $\angle EBC = \dfrac{\angle BAE}{2} = 36^\circ$.
Aleshores, $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$.
Per tant, $\angle DEC = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 180^\circ - (72^\circ + 54^\circ) = 54^\circ$.