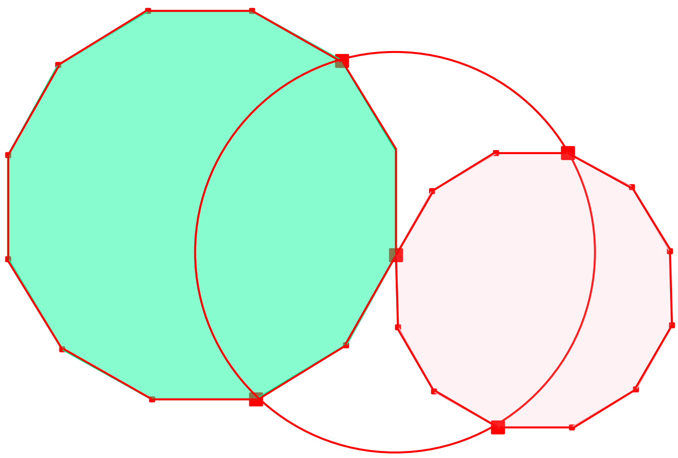
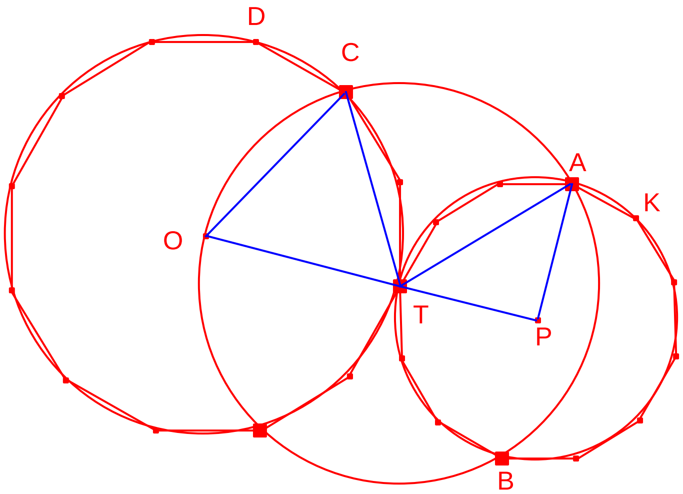
3191.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars.



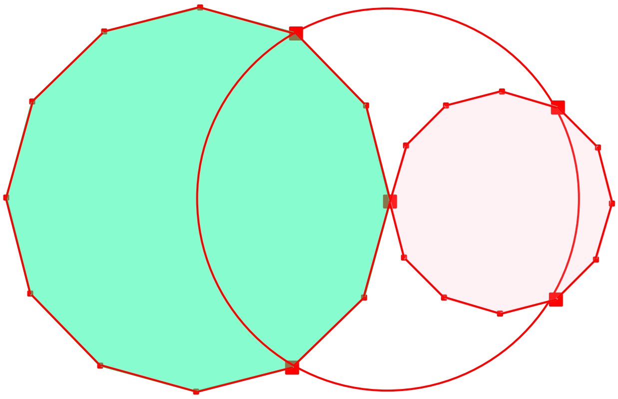
Solució:



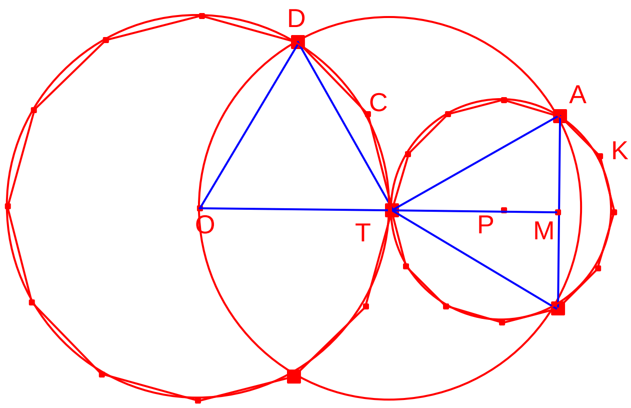
Siga el dodecàgon regular de centre O i costat $\overline{CD}$
Siga $\overline{OT} = R$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{CT}$ és igual al costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre O.
$\overline{CT} = \overline{OT}$
Aleshores la circumferència de centre T que passa per C passa pel centre O.

Siga el dodecàgon regular de centre P i costat $\overline{AK}$
Siga $\overline{PT} = r$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{AT} = R$ és igual al costat del quadrat inscrit en la circumferència de centre P.
$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AT} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars és igual al quadrats de la proporció dels radis de les circumferències circumscrites.
$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

3192.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars.



Solució:



Siga el dodecàgon regular de centre O i costat $\overline{CD}$
Siga $\overline{OT} = R$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{CT}$ és igual al costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre O.
$\overline{CT} = \overline{OT}$
Aleshores la circumferència de centre T que passa per C passa pel centre O.

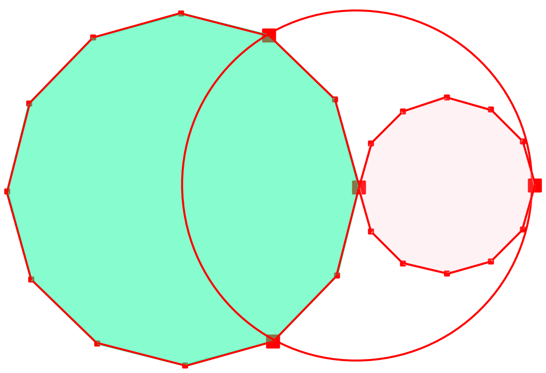
Siga el dodecàgon regular de centre P i costat $\overline{AK}$
Siga $\overline{PT} = r$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{AT} = R$ és igual al costat del triangle equilàter inscrit en la circumferència de centre P.

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{3}R$$

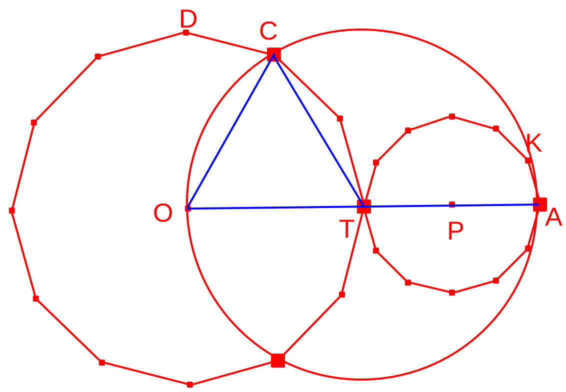
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars és igual al quadrats de la proporció dels radis de les circumferències circumscrites.

$$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

3193.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars.



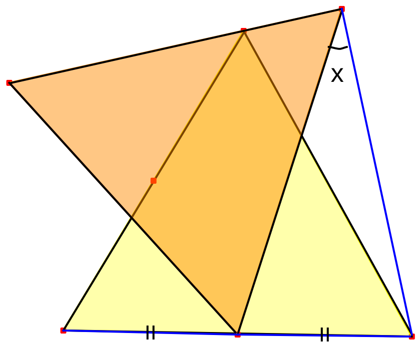
Solució:



Siga el dodecàgon regular de centre O i costat $\overline{CD}$
Siga $\overline{OT} = R$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{CT}$ és igual al costat de l'hexàgon regular inscrit en la circumferència de centre O.
$\overline{CT} = \overline{OT}$
Aleshores la circumferència de centre T que passa per C passa pel centre O.

Siga el dodecàgon regular de centre P i costat $\overline{AK}$
Siga $\overline{PT} = r$, radi de la circumferència circumscrita.
$\overline{AT} = R$ és igual al costat del triangle equilàter inscrit en la circumferència de centre P.
$r = \frac{1}{2}\overline{AT} = \frac{1}{2}R$
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons regulars és igual al quadrats de la proporció dels radis de les circumferències circumscrites.
$\frac{S_{verda}}{S_{rosa}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 2^2 = 4$

3194.- En la figura, els dos triangles són equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

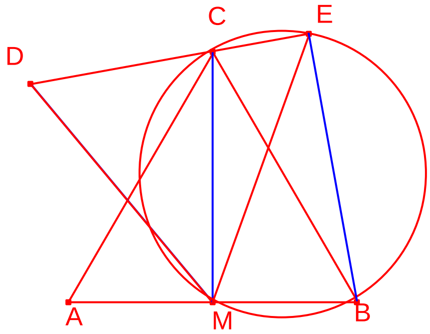
Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEM}$, M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$\angle CEM = \angle MEB = 60°$

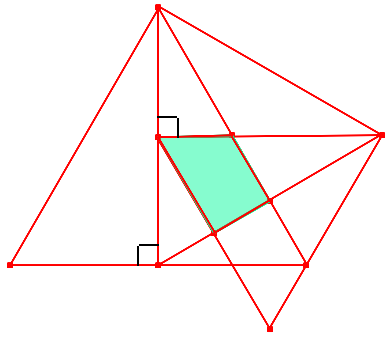
Aleshores, el quadrilàter $CEBM$ és inscriptible en una circumferència.

$\angle CEB = 180° - \angle CMB = 90°$

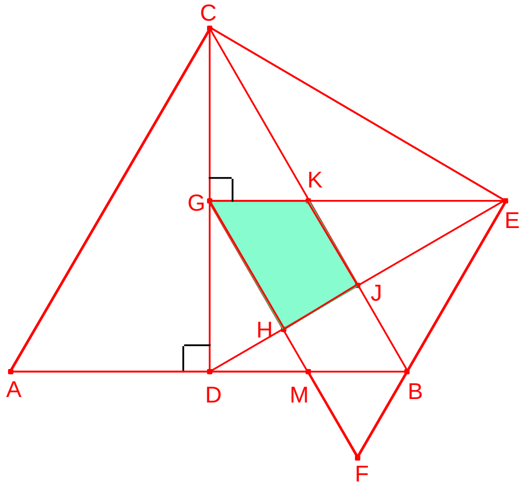
$x = \angle MEB = \angle CEB - \angle CEM = 90° - 60° = 30°$



3195.- La figura està formada per tres triangles equilàters.
Determineu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i el total de la figura.



Solució:



AB=4
CD=2·sqrt(3)
GE=3
CG=sqrt(3)
GK=1, CK=2
KE=EB=2
BF=1
BJ=1, KJ=1
GH=3/2

EH=(3/2)·sqrt(3)

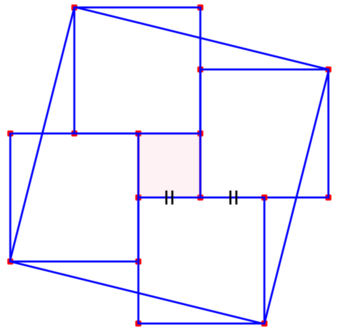
HJ=(1/2)sqrt(3)

GHJK trapezi
[GHJK]=(5/8)sqrt(3)

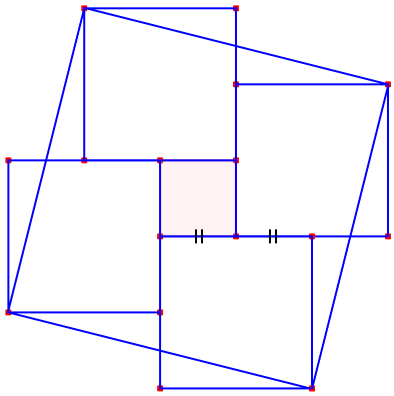
[AMFEC]=[ABC]+[BEC]+[BFM]=(25/4)sqrt(3)

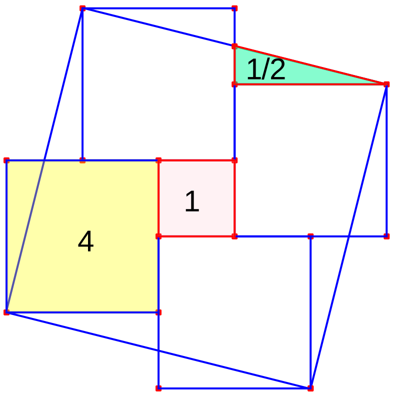
[GHJK]/[AMFECl]=1/10

3196.- En la figura s'han dibuixat 6 quadrats. Determineu la proporció entre l'àrea del quadrat menut i l'àrea total de la figura



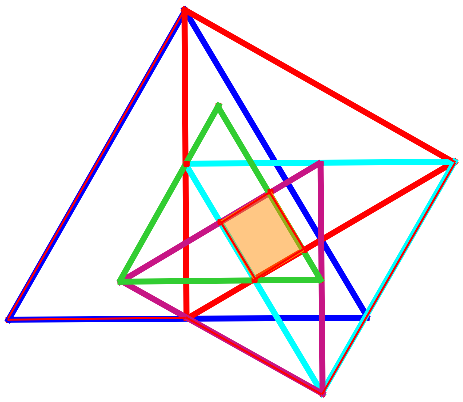
Solució:



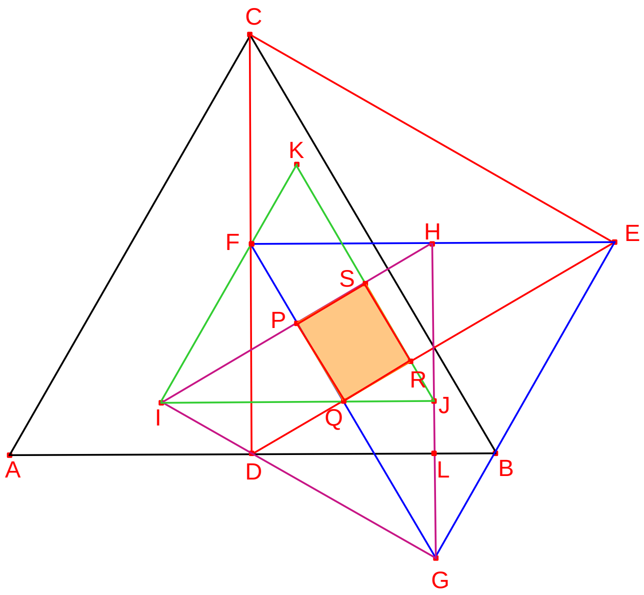


Proporció:
1/(1+4·4+4(1/2))=1/19

3197.- En la figura hi ha cinc triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea total de la figura.



Solució:



AB=4
CD=2·sqrt(3)

FE=3
HG=(3/2)·sqrt(3)

IJ=9/4

BE=2, BG=1E

GL=(1/2)sqrt(3)

IQ=3/2, QJ=3/4

PQ=3/4, QR=(3/8)sqrt(3)

[PQRS]=(3/4)·(3/8)sqrt(3)=(9/32)sqrt(3)

ACEG trapezi
[ACEG]=((4+3)/2)·2·sqrt(3)=7·sqrt(3)

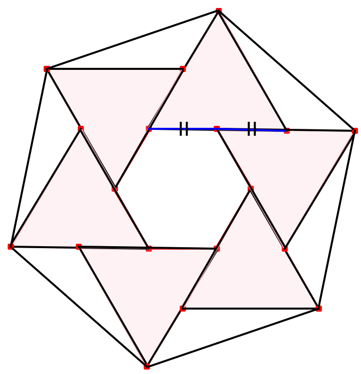
[ADG]=(1/2)·AD·GL=(1/2)·sqrt(3)

[ADGEC]=[ACEG]-[ADG]=(13/2)·sqrt(3)

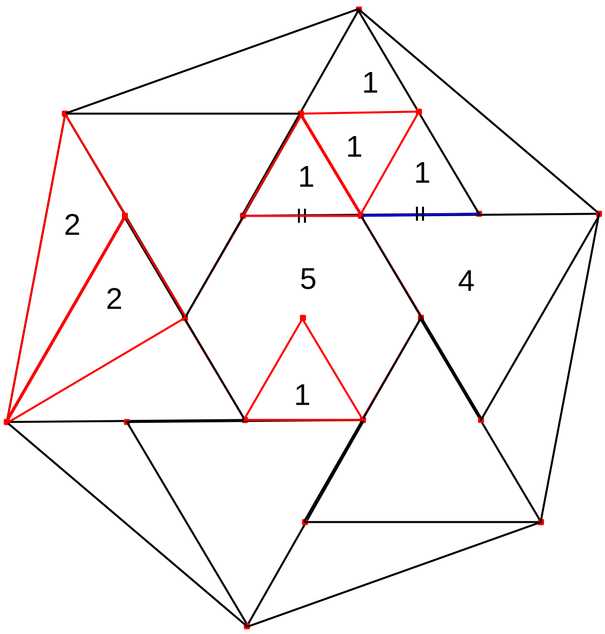
Proporció àrees:

[PQRS]/[ADGEC]=9/208

3198.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la on ombrejada i l'àrea de l'hexàgon exterior.

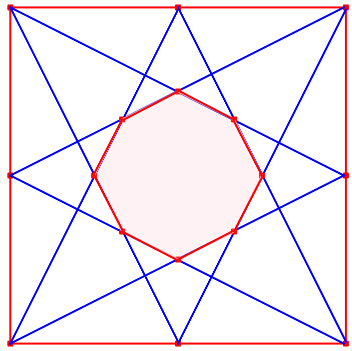


Solució:

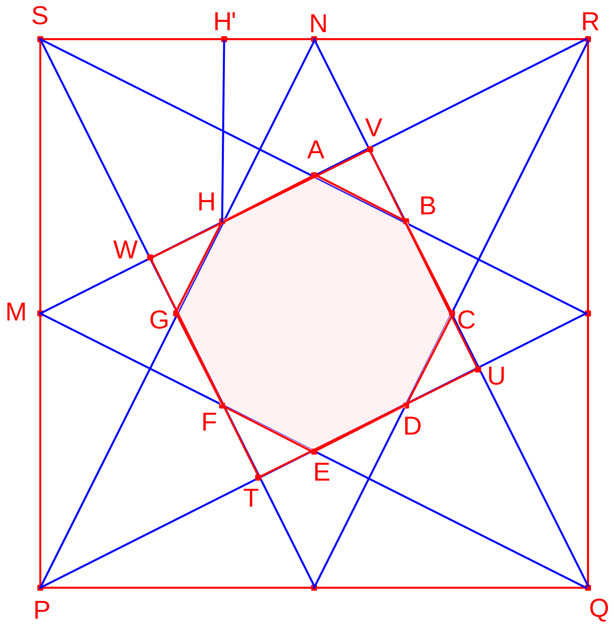


$S_{ombrejada} = 6 \cdot 4 = 24$
$S_{Total} = 6 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 42$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{Total}} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$

3199.- En la figura els vèrtexs del quadrat s'uneixen en els punts migs dels costats.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'octògon i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat $PQRS$ de costat $\overline{PQ} = 2$
Siga l'octògon equilàter (no regular) $ABCDEFGH$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{PS}, \overline{RS}$, respectivament.



$\overline{MR} = \sqrt{5}$

$\overline{NA} = \frac{1}{2}$

$\overline{MA} = \overline{RA} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Siga H' la projecció de H sobre el costat $\overline{RS}$

$\overline{HH'} = x$

$\overline{SH'} = x, \overline{NH'} = 1 - x$

$\frac{\overline{HH'}}{\overline{NH'}} = 2$

$\frac{x}{1 - x} = 2$

Resolent l'equació:

$x = \frac{2}{3}$

$\overline{MH} = \overline{NH} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

Siga $\overline{MW} = a, \overline{SW} = 2a, \overline{SM} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MWS}$:

$\overline{MW} = \frac{1}{5}\sqrt{5}, \overline{SW} = \overline{RV} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\overline{VW} = \overline{RM} - \overline{MW} - \overline{RV} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\overline{WH} = \overline{MH} - \overline{MW} = \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{15}\sqrt{5}$

$\overline{WG} = \overline{RA} - \overline{RV} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{1}{10}\sqrt{5}$

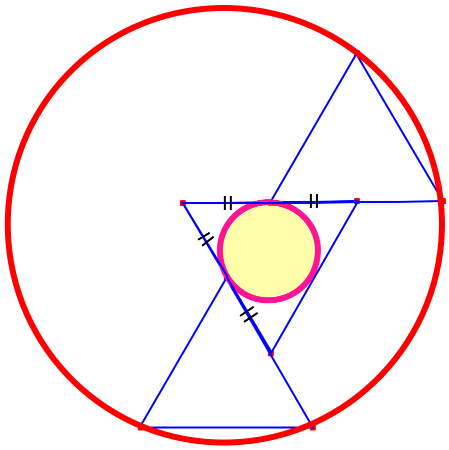
L'àrea de l'octògon $ABCDEFGH$ és:

$$S_{ABCDEFGH} = S_{TUVW} - 4 \cdot S_{GWH} = \overline{VW}^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\overline{WH} \cdot \overline{WG} = \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{15}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{10}\sqrt{5} = \frac{2}{3}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ABCDEFGH}}{S_{PQRS}} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{6}$$

3200.- La figura conté dues circumferències i tres triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.

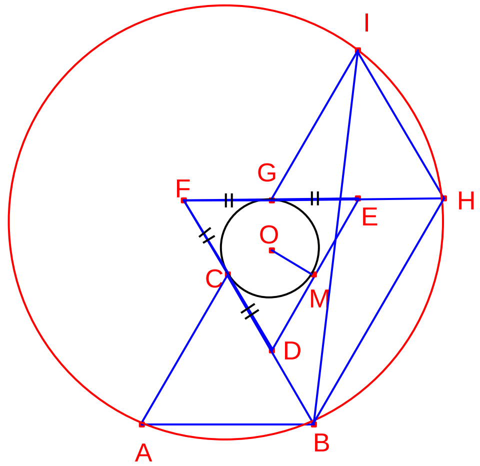


Solució:

Siguen els tres triangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{GHI}$ de costat $\overline{AB} = 2$

Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$.

$$r = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$



$$\overline{BH} = \overline{BF} = 3$$
$$\angle IHB = 120°$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BHI}$

$$\overline{BI}^2 = 9 + 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 19$$
$$\overline{BI} = \sqrt{19}$$

Siga R el radi de la circumferència exterior.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABI}$:

$$\frac{\overline{BI}}{\sin 60°} = 2R$$
$$R = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{interior}}{S_{exterior}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{3}} = \frac{1}{19}$$