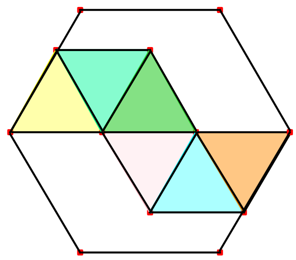
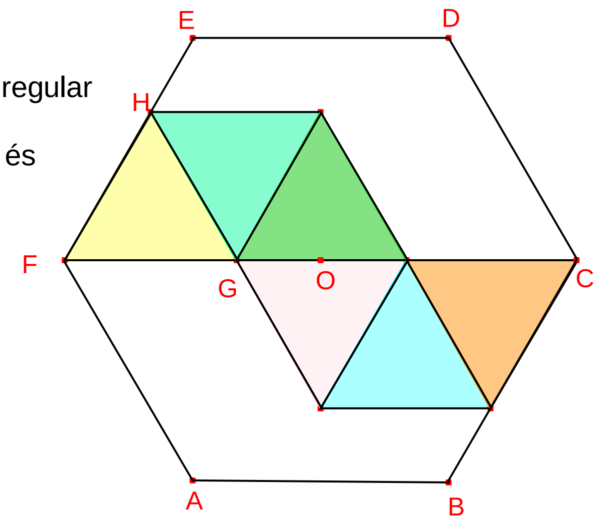
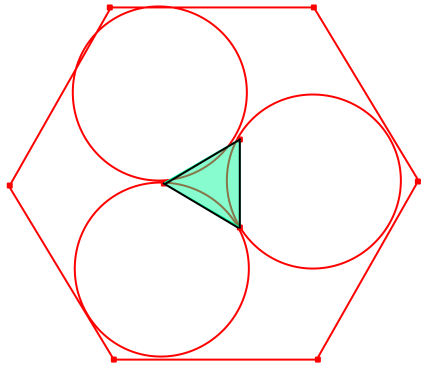
3201,. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels triangles equilàters i l'àrea de l'hexàgon exterior.



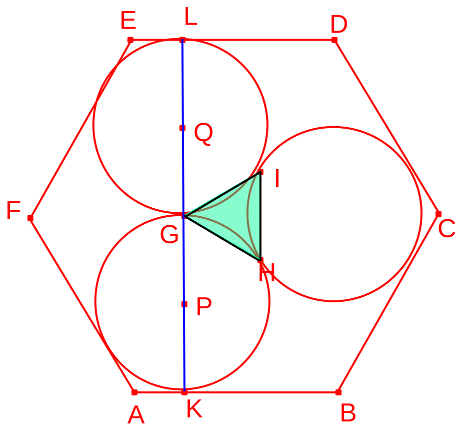
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 3a$ i centre O.
El costat del sis triangles equilàters és
$\overline{FG} = \frac{1}{3}6a = 2a$
Els 6 triangles equilàters formen un hexàgon regular de costat $2a$
La proporció de les àrees dels dos hexàgons és igual al quadrat de la proporció dels costats:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{2a}{3a}\right)^2 = \frac{4}{9}$



3202.- Donat un hexàgon regular s'han dibuixat tres circumferències iguals tangents.
Calculeu la proporció d'àrees entre el triangle format pels punts de tangència de les tres circumferències i l'hexàgon regular.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Siguen les circumferències tangents de centres P, Q i radi $r = \overline{PG} = \overline{QG}$
Sigen K, L punts de tangència.

$$\overline{KL} = 4r = \sqrt{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

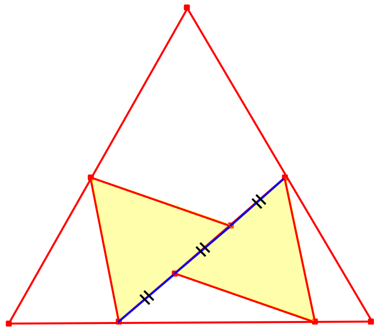
Siga el triangle equilàter ombrejat $\overset{\Delta}{GHI}$ de costat $\overline{GH} = r$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{GHI}$ és:

$$S_{GHI} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{64}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{GHI}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{64}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{32}$$

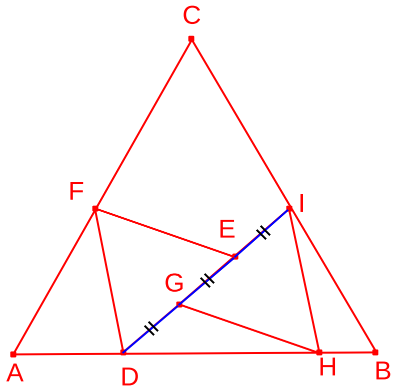
3203.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos triangles equilàters ombrejats i l'àrea del triangle equilàter exterior.



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen els dos triangles ombrejats iguals $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{GHI}$ de costat $\overline{DE} = 2a$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DGH}$:

$$\overline{DH}^2 = a^2 + 4a^2 + 2a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = 7a^2$$

$$\overline{DH} = a\sqrt{7}$$

Siguen $\alpha = \angle GDH, \beta = \angle GHD$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DGH}$:

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{7}}{\sin 60°}$$

Aleshores:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin 60°}$$

$$\overline{AD} = \frac{4}{\sqrt{7}}a$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{HBI}$:

$$\frac{\overline{BH}}{\sin\beta} = \frac{2a}{\sin 60°}$$

$$\overline{BH} = \frac{2}{\sqrt{7}}a$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DH} + \overline{BH} = \frac{13}{\sqrt{7}}a$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{DEF} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{13}{\sqrt{7}}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{169}{7}a^2$$

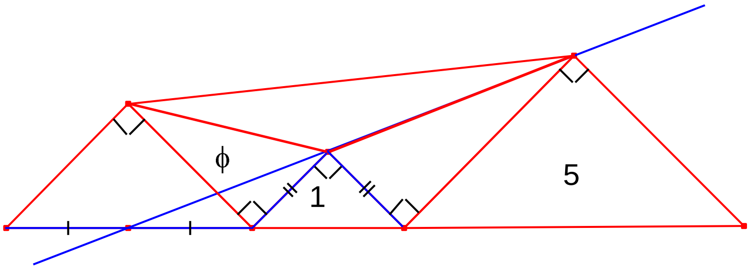
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{169}{7}a^2} = \frac{56}{169}$$

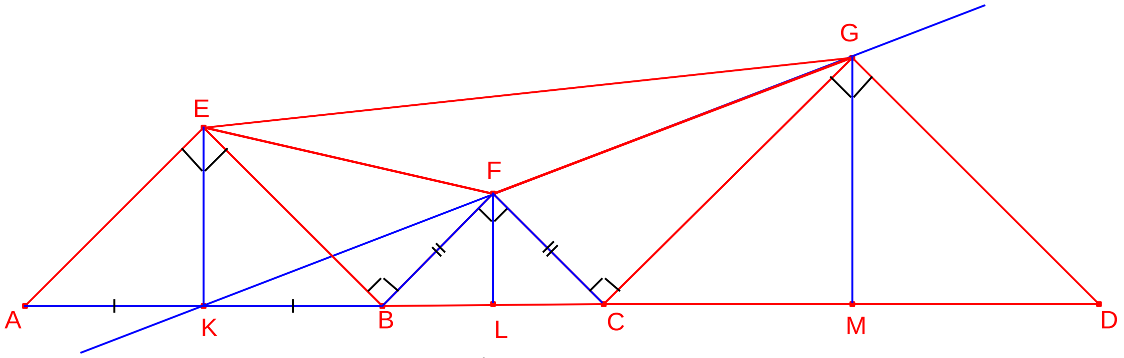
3204.- En la figura, les àrees del tres triangles rectangles són $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 5$

Proveu que la recta que passa per dos vèrtexs dels triangles rectangles passa pel punt mig de la hipotenusa del tercer triangle (veure figura).

Calculeu l'àrea dels altres tres triangles.



Solució:



Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCF}, F=90°$ d'àrea 1.

$\overline{CF}=\overline{BF}=\sqrt{2}, \overline{BC}=2$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FCG}, C=90°$ és:

$$S_{FCG}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5}$$

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDG}, G=90°$ d'àrea 5.

$\overline{DG}=\overline{CG}=\sqrt{10}, \overline{CD}=2\sqrt{5}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBF}, B=90°$ d'àrea. $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\sqrt{2}=\phi$$

$$\overline{BE}=\phi\sqrt{2}, \overline{AB}=2\phi$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE}=\frac{1}{2}\overline{BE}^2=\phi^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Siguen K, L, M els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$

$\overline{AK}=\overline{BK}=\phi$

$$\overline{KM}=\phi+2+\sqrt{5}=\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \overline{KL}=\phi+1=\phi^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

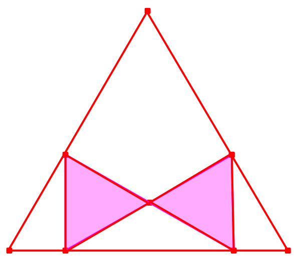
$$\frac{\overline{GM}}{\overline{KM}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\overline{FL}}{\overline{KL}}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Aleshores, els punts K, L, M estan alineats.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFG}$ és:

$$S_{EFG}=S_{KMGE}-S_{LMGF}-S_{KLFE}=\frac{\phi+\sqrt{5}}{2}\frac{5+3\sqrt{5}}{2}-\phi\cdot\frac{\phi}{2}-\frac{\phi+1}{2}\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\phi^2$$

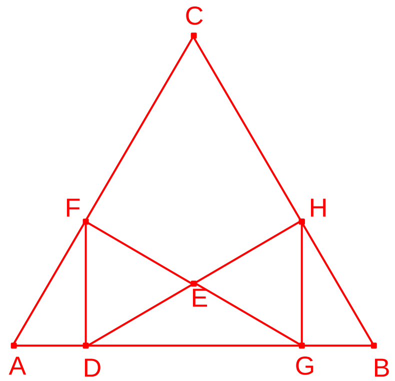
3205.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos triangles equilàters iguals ombrejats i l'àrea del triangle equilàter exterior



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen els dos triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{EGH}$ de costat $\overline{DF} = c$



$\overline{DG} = c\sqrt{3}$

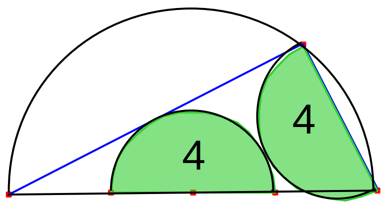
$\overline{AD} = \overline{BG} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$

$\overline{AB} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right)c = \frac{5\sqrt{3}}{3}c$

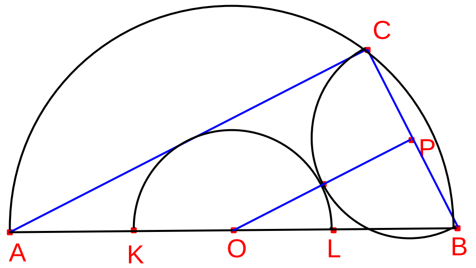
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}c\right)^2} = \frac{6}{25}$$

3206.- En la figura els dos semicercles ombrejats tenen àrea 4.
Calculeu l'àrea del semicercle exterior.



Solució:



Siga la semicircumferència exterior de centre O i radi $\overline{OB} = R$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OL} = r$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{OB} = r$
L'àrea del semicercle de centre P és 4:

$\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 = 4$

$\pi \cdot r^2 = 8$

$\overline{OP} = 2r$

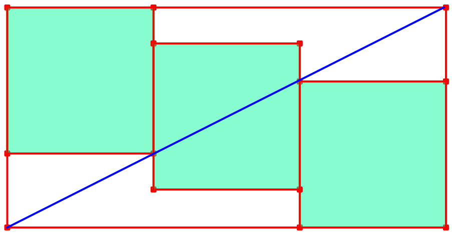
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:

$R^2 = 4r^2 + r^2 = 5r^2$

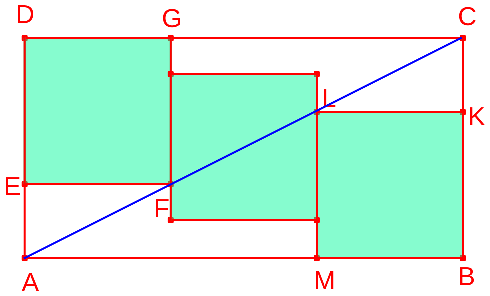
L'àrea del semicercle gran és:

$S_{gran} = \frac{1}{2}\pi \cdot R^2 = \frac{1}{2}5 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 = 20$

3207.- En un rectangle s'han disposat tres quadrats iguals.
La diagonal del rectangle passa per dos vèrtexs dels quadrats (veure figura)
Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels tres quadrats i l'àrea del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siguen els quadrats ombrejats $DEFG, BKLM$ de costat $\overline{DG} = c$.
$\overline{AB} = 3c$
Siga $\overline{CK} = x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AML}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c+x}{c} = \frac{3c}{2c}$$

Resolent l'equació:

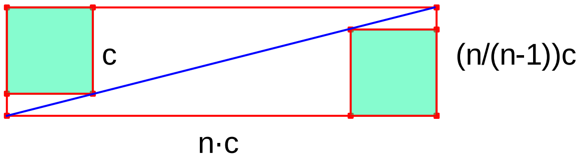
$$x = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{BC} = \frac{3}{2}c$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot c^2}{3c \cdot \frac{3}{2}c} = \frac{2}{3}$$

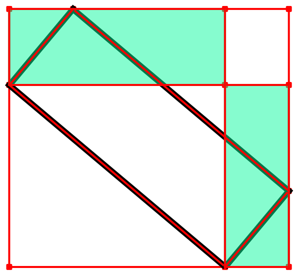
Generalització:



Si hi ha n quadrat la proporció és:

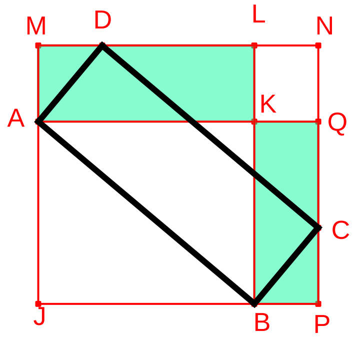
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{n-1}{n}$$

3208.- L'àrea del rectangle negre és 16.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

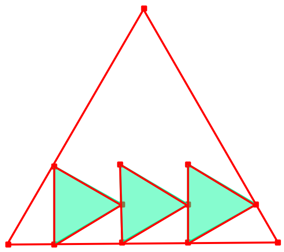


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ d'àrea 16.
Siguen els rectangles $AKLM, BPQK$.
Siga $\overline{MD} = \overline{BP} = x, \overline{AM} = \overline{CP} = y, \overline{AJ} = \overline{PQ} = \overline{MC} = z, \overline{ML} = \overline{JB} = \overline{DN} = t$

$S_{AKLM} + S_{BPQK} = yt + xz$
$16 = S_{ABCD} = S_{JPNM} - 2 \cdot S_{AJB} - 2 \cdot S_{AMD}$
$16 = (x+t)(y+z) - xy - tz = yt + xz$
Aleshores:
$S_{AKLM} + S_{BPQK} = yt + xz = 16$



3209.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels tres triangles equilàters iguals ombrejats i l'àrea del triangle equilàter exterior.



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen els dos triangles equilàters iguals $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{HIJ}$ de costat $\overline{DF} = c$

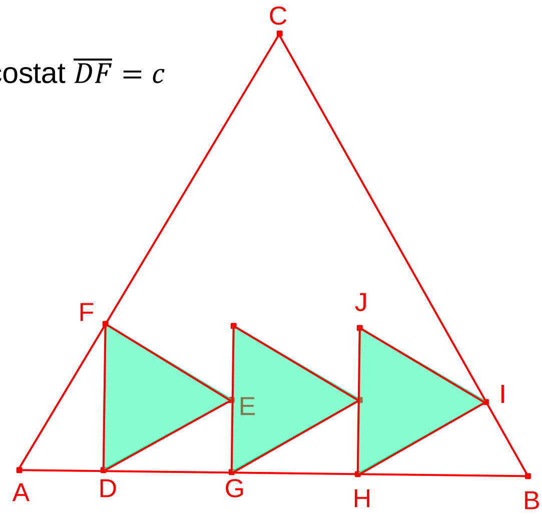
$\overline{DH} = c\sqrt{3}$

$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}c, \overline{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c$

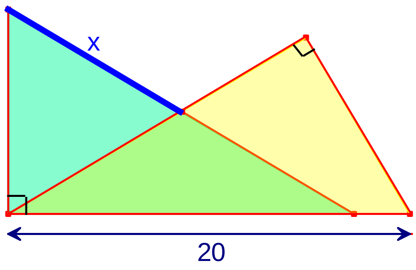
$\overline{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)c = 2\sqrt{3}c$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{3}c\right)^2} = \frac{1}{4}$$



3210.- En la figura hi ha dos triangles rectangles iguals.
Calculeu la mesura del segment x



Solució:

Siguen els triangles rectangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EAD}$
$\overline{AD} = \overline{BD} = 20°$
Siga $\overline{CF} = x$
$\overline{BF} = 20 - x$
$\angle ABC = \angle EAD, \angle ACB = \angle EDA$
El triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és isòsceles:
$\overline{AF} = \overline{BF} = 20 - x$
El triangle $\overset{\Delta}{ACF}$ és isòsceles:
$\overline{AF} = \overline{CF}$
Aleshores, $x = 20 - x$
Resolent l'equació:
$x = 10$