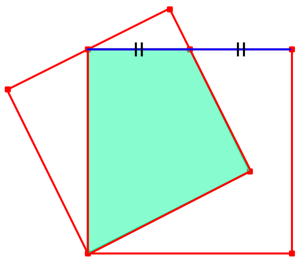
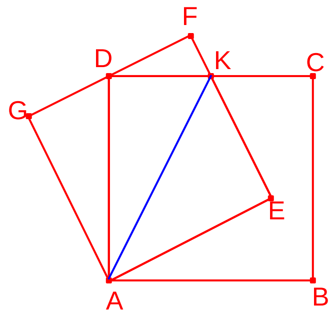
3211.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos quadrats i l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2c$
Siga K el plunt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga el quadrat $AEFG$.
Siga $\overline{FK} = x, \overline{DF} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DFK}, \overset{\Delta}{AGD}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, $\overline{AG} = 2y, \overline{GD} = 2x$
$\overline{AG} = \overline{FG}$
Aleshores:
$2y = 2x + y$
$y = 2x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DFK}$:
$c^2 = x^2 + y^2 = 5x^2$

$\overline{AE} = 4x, \overline{KE} = 3x$
La intersecció dels dos quadrats és el quadrilàter $AEKD$.
La seua àrea és:

$$S_{AEKD} = S_{AEK} + S_{ADK} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 3x + \frac{1}{2} \cdot c \cdot 2c = 6x^2 + c^2 = 11x^2$$

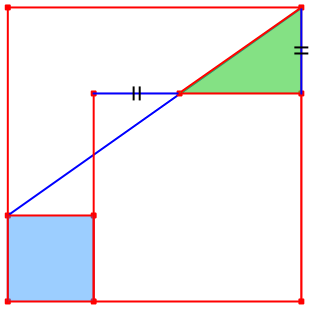
El polígon total és $ABCKFG$.
La seua àrea és:

$$S_{ABCKFG} = S_{ABCD} + S_{AGD} + S_{DFK} = 4c^2 + \frac{1}{2}4x \cdot 2x + \frac{1}{2}x \cdot 2x = 20x^2 + 4x^2 + x^2 = 25x^2$$

La proporció d'àrees és:

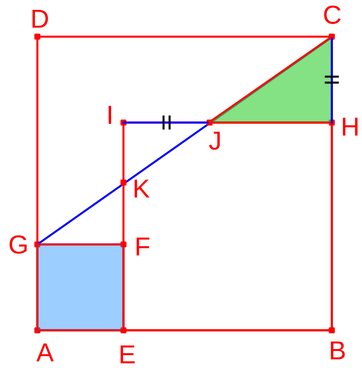
$$\frac{S_{AEKD}}{S_{ABCKFG}} = \frac{11x^2}{25s^2} = \frac{11}{25}$$

3212.- La figura està formada per tres quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del quadrat ombrejat.



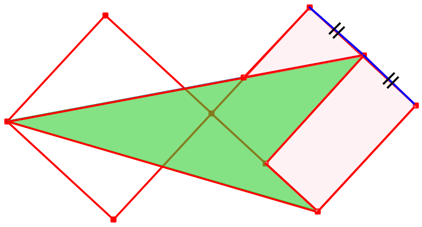
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el quadrat $EBHI$ de costat $\overline{EB} = a$
Siga $\overline{CH} = x$
Aleshores, el costat cel quadrat $AEFG$ és $\overline{AE} = x$

Siguen K, J les interseccions del segment $\overline{CG}$ i els costat $\overline{EI}, \overline{HI}$, respectivament.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KIJ}, \overset{\Delta}{KFG}$ són iguals (ACA)
Tal que $\overline{IJ} = \overline{GF} = \overline{CH}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KIJ}, \overset{\Delta}{CHJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{\frac{a-x}{2}} = \frac{a-x}{x}$$
Simplificant:
$$\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$x = \left(\sqrt{2}-1\right)a$$
L'àrea del triangle verd és:
$$S_{JHC} = \frac{1}{2}x(a-x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a \cdot \left(2-\sqrt{2}\right)a = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-4\right)a^2$$
L'àrea del quadrat blau $AEFG$ és:
$$S_{AEFG} = x^2 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)a\right)^2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{JHC}}{S_{AEFG}} = \frac{\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-4\right)a^2}{\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3213.- En la figura hi ha dos quadrats simètrics respecte d'un vèrtex.
Calculeu la proporció entre la suma de l'àrea rosa i l'àrea verda.



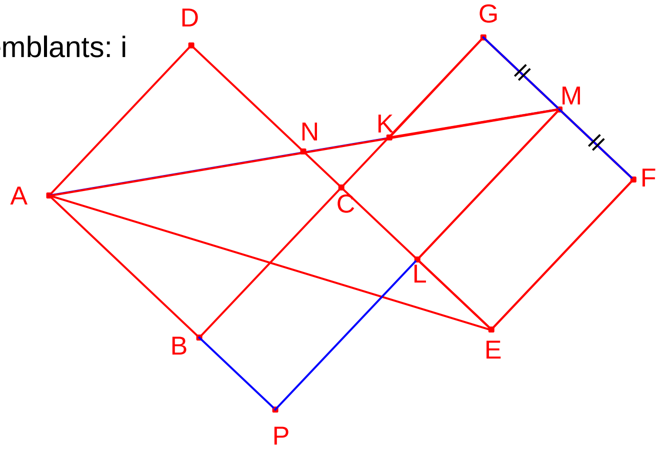
Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, CEFG$ de costat $\overline{AB} = 2c$
Siguen L, M els punts migs de $\overline{CE}, \overline{GF}$, respectivament.
Les rectes AB, LM és tallen en el punt P
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APM}, \overset{\Delta}{KGM}$ són semblants: i de raó 3:1
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{GK} = \frac{1}{3} \cdot 4c = \frac{4}{3}c$$

$$\overline{CK} = \frac{2}{3}c$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APM}, \overset{\Delta}{NCK}$ són semblants: i de raó $4 : \frac{2}{3}$
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{NC} = \frac{1}{6} \cdot 3c = \frac{1}{2}c$$



L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = S_{LEFM} + S_{KGM} = 2c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}c^2 = \frac{8}{3}c^2$$

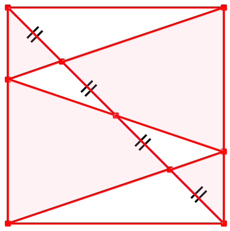
L'àrea verda és:

$$S_{verda} = S_{AME} + S_{NLM} = \frac{1}{2}\left(\left(2c + \frac{1}{2}c\right)2c\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}c \cdot 2c = \frac{8}{2}c^2$$

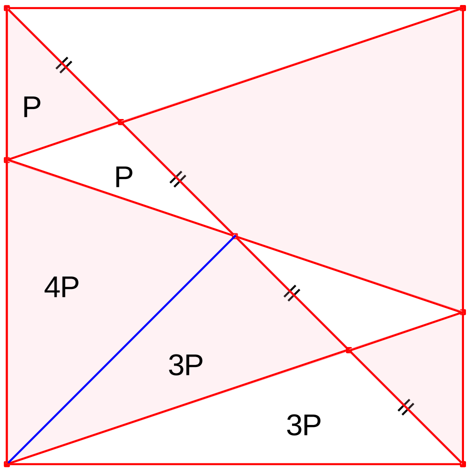
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{rosa}}{S_{verda}} = \frac{\frac{8}{3}c^2}{\frac{8}{2}c^2} = \frac{2}{3}$$

3214.- La diagonal d'un quadrat s'ha dividit en quatre parts iguals.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



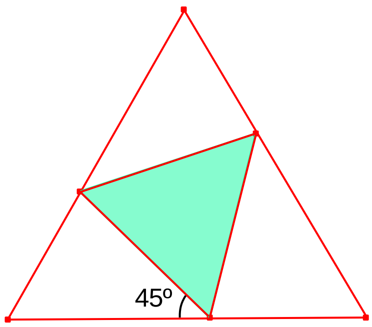
Solució:



La figura ombrejada és simètrica respecte del centre del quadrat.
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{P + 7P}{P + 7P + P + 3P} = \frac{2}{3}$$

3215.- Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del triangle exterior.



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga el triangle equilàter ombrejat $\overset{\Delta}{DEF}$

Siga H la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{FH} = \overline{DH} = x$

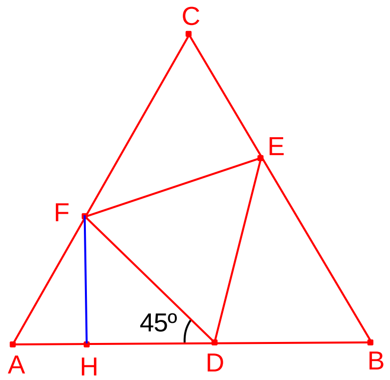
$\overline{DF} = x\sqrt{2}$

$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{AF} = \overline{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$

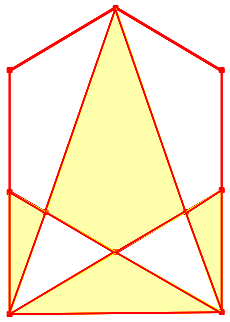
$\overline{AB} = \left(1+\sqrt{3}\right)x$

La proporció d'àrees és:

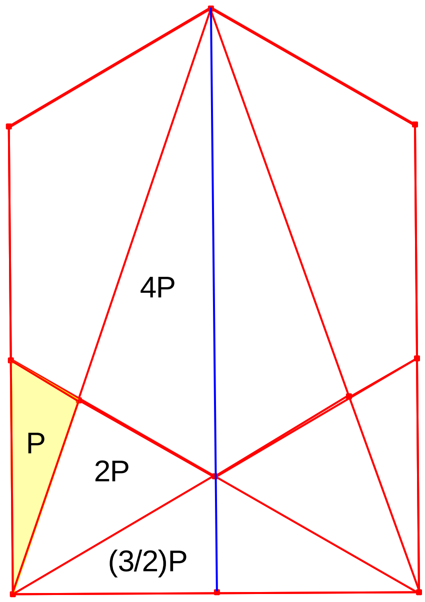
$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x\sqrt{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)x\right)^2} = 2-\sqrt{3}$$

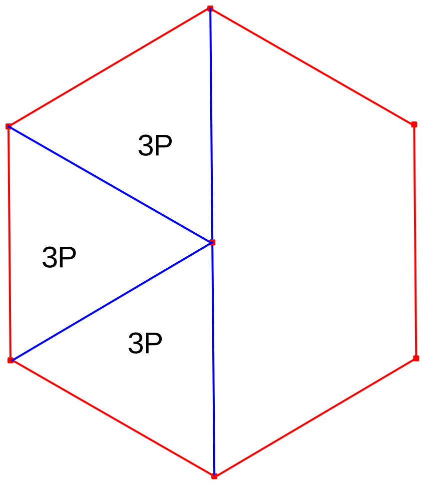


3216.- En la figura, calculeu la proporció entre la zona ombrejada i el total de la figura,



Solució:





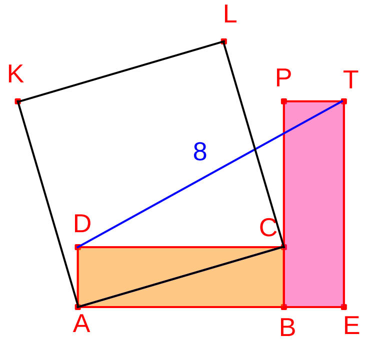
$$S_{ombrejada} = 2\left(4P + P + \frac{3}{2}P\right) = 13P$$

$$S_{total} = 2\left(4 \cdot 3P + \frac{3}{2}P\right) = 27P$$

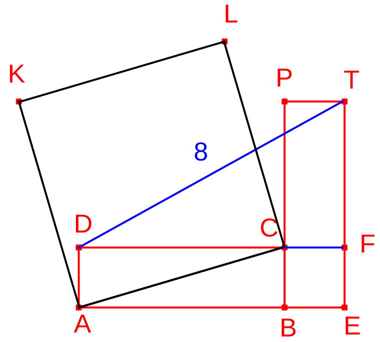
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{13P}{27P} = \frac{13}{27}$$

3217.- En la figura els quadrats $ABCD, BETP$ són iguals.
$\overline{DT} = 8$
Calculeu la mesura de l'àrea del quadrat $ACLK$.



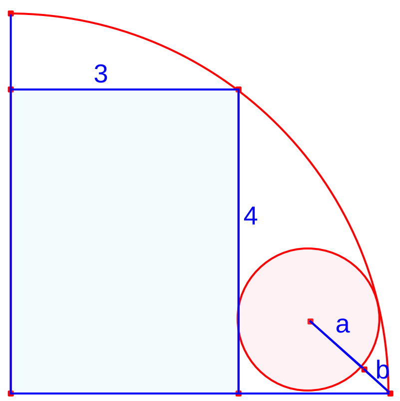
Solució:
Siga $\overline{AD} = \overline{BE} = a, \overline{AB} = \overline{ET} = b$
Siga F la projecció de C sobre $\overline{ET}$
$\overline{DF} = a + b, \overline{FT} = b - a$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DFT}$:
$64 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2a^2 + 2b^2$
Simplificant:
$a^2 + b^2 = 32$

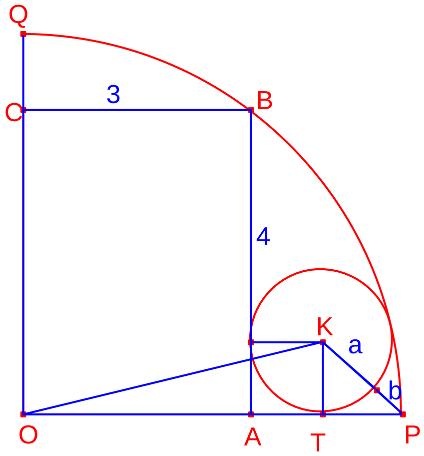
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2$
L'àrea del quadrat $ACLK$ és:
$S_{ACLK} = \overline{AC}^2 = a^2 + b^2 = 32$

3218.- En un quadrant hi ha inscrit un rectangle 3×4 i una circumferència tangent a un costat del rectangle, al quadrant i al radi.
Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$



Solució:
Siga el quadrat $OABC$ de costats $\overline{OA} = 3, \overline{OC} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$, el radi del quadrant és:
$\overline{OB} = 5$



Siga el cercle de centre K i radi $\overline{KT} = a$
$\overline{OK} = 5 - a, \overline{OT} = 3 + a$

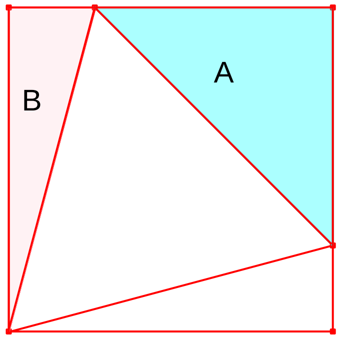
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTK}$:
$(5-a)^2 = a^2 + (3+a)^2$
$a^2 + 16a - 16 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 4\sqrt{5} - 8$
$\overline{TP} = 2 - a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTP}$:
$(a+b)^2 = a^2 + (2-a)^2$
$b^2 + 2ab - (2-a)^2 = 0$

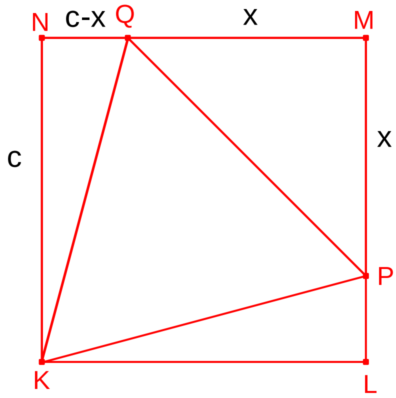
$$b = \frac{-2a + \sqrt{4a^2 + 4(2-a)^2}}{2} = -a + \sqrt{a^2 + (2-a)^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2-a}{a}\right)^2}} = \frac{1}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5} - 2)}\right)^2}} = 2$$

3219.- En un quadrat s'ha inscrit un triangle equilàter.
Determineu la proporció d'àrees:
$\frac{A}{B}$

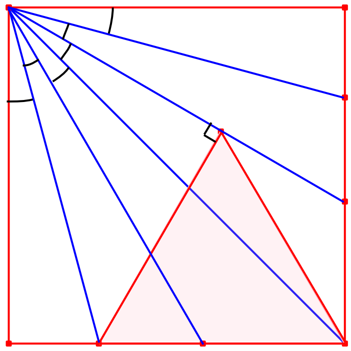


Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\overline{MP} = \overline{MQ} = x$
$\overline{KQ} = \overline{PQ} = x\sqrt{2}$

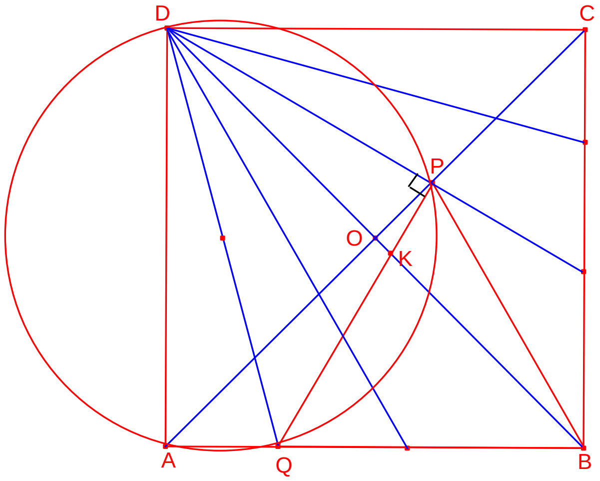


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNQ}$:
$2x^2 = c^2 + (c-x)^2$
Simplificant:
$2c^2 - 2xc + x^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$c = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{A}{B} = \frac{S_{PMQ}}{S_{KNQ}} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}c(c-x)} = \frac{x^2}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}x\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}x - x\right)} = 2$$

3220.- En la figura, des d’un vèrtex del quadrats s’han dibuixat segments que divideixen l’angle recte en 6 parts iguals.
El triangle ombrejat és equilàter?



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Cadascun dels angles en que els segments divideixen l’angle recte mesura 15º.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{QBP}$



DP=QP
anglePQB=60º
AQPD cíclic, angles oposats suplementaris
angle DAP=angle DQP=45º

O pertany AP
P pertany a la diagonal AC
DOP=90º

Els triangles DOP, BOP són iguals

angle DBP=angle BDP=15º

angle QBP=60º
triangle QBP equilàter