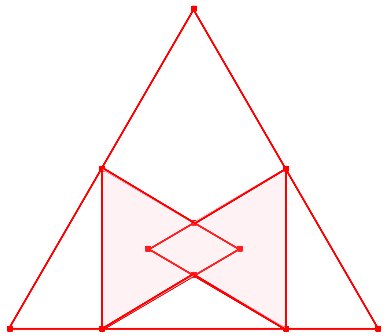
Problemes de Geometria per a l'ESO 323

3221.- Calculeu la proporció entre l'àrea del la zona sobreposada pels dos triangles equilàters iguals ombrejats i l'àrea del triangle equilàter exterior.
Els triangles interiors tenen un vèrtex en el baricentre de l'altre.



Solució:

Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen els triangles equilàter $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{DE} = 3c$

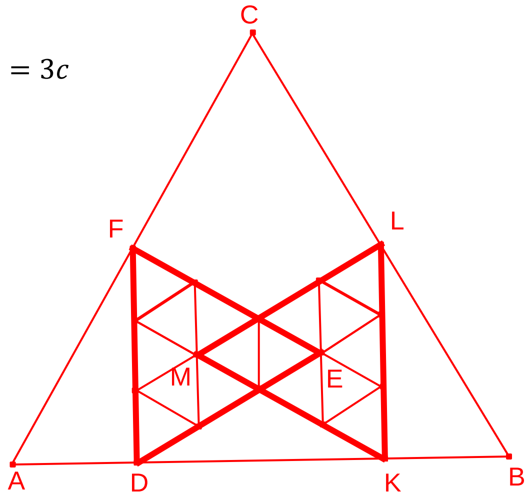
$\overline{AD} = c\sqrt{3}$

$\overline{DK} = 2c\sqrt{3}$

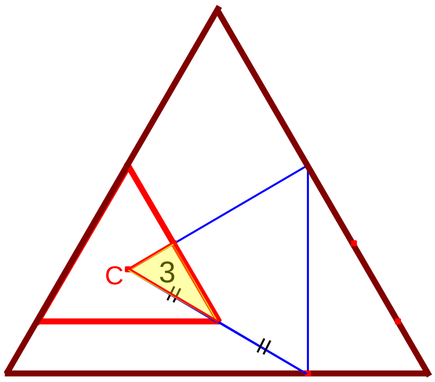
$\overline{AB} = 4c\sqrt{3}$

La proporció d'àrees és:

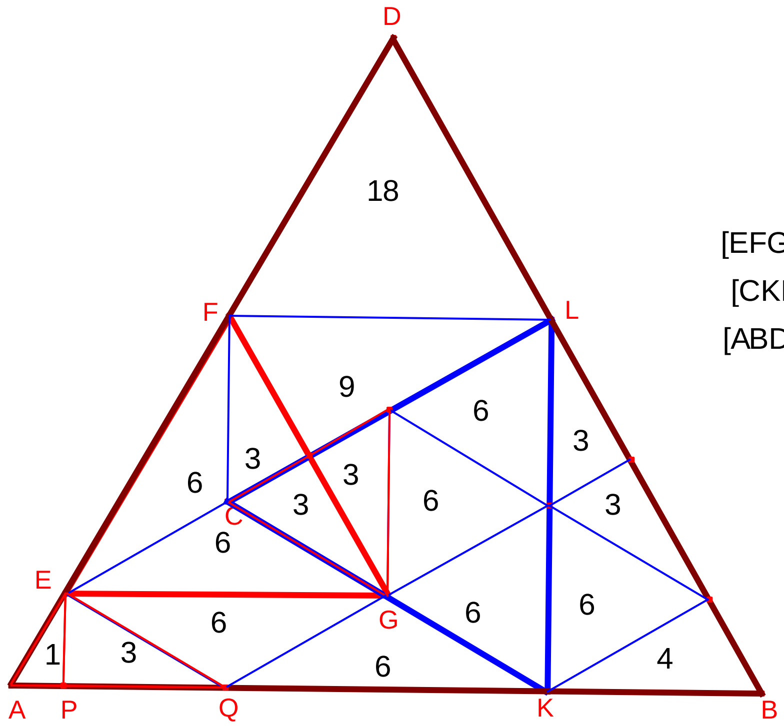
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4c\sqrt{3}\right)^2} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$



3222- En la figura, hi ha tres triangles equilàters.
C és el baricentre del triangle equilàter menut.
Si el triangle ombrejat (intersecció dels dos triangles) té àrea 3
Calculeu l'àrea dels tres triangles equilàters.



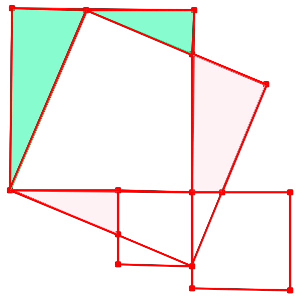
Solució:



[EFG]=18
[CKL]=24
[ABD]=98

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEQ}, \overset{\Delta}{APE}$ són semblants i de raó 2:1
$S_{EPQ} = 3$
Aleshores, $S_{APE} = 1$

3223.- Els quatre quadrats de la figura determinem dues regions una verda i l'altra rosa.
Proveu que les àrees són iguals.

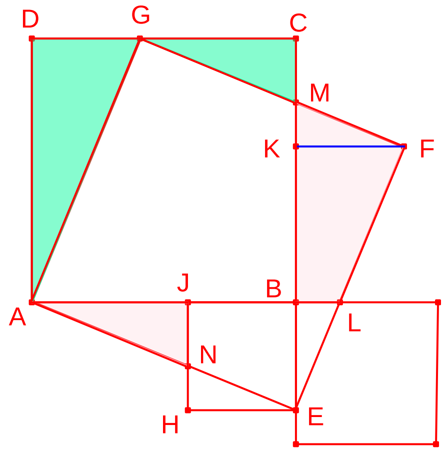


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, AEFG, BEJH$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADG}, \overset{\Delta}{ABE}$ són iguals.
$\overline{DG} = \overline{BE} = \overline{BJ}$
Aleshores, $\overline{CG} = \overline{AJ}$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJN}, \overset{\Delta}{GCM}$ són iguals

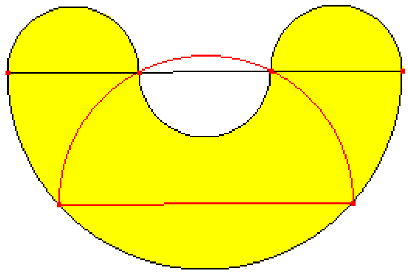
Siga la projecció K de F sobre el costat $\overline{BC}$



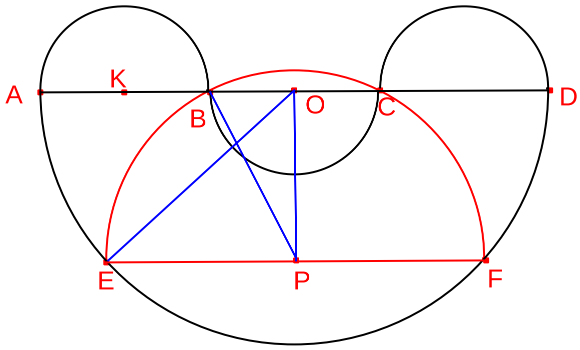
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEL}, \overset{\Delta}{EFM}$ són iguals.
$\overline{BE} = \overline{FK}$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBL}, \overset{\Delta}{FKM}$ són iguals
Aleshores, $S_{ADG} = S_{ABE} = S_{EKF} = S_{BLFM}$
Aleshores l'àrea verda i rosa són iguals.

3224.- Els tres semicercles petits tenen la mateixa mida.
L’àrea del semicercle vermell és 10.
Quina és la superfície groga total?



Solució:



Siga el semicercle de centre K i radi $\overline{KA} = r$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = 3r$
Siga el semicercle vermell de centre P i radi $\overline{PE} = R$

$\frac{1}{2}\pi R^2 = 10$

Siga $x = \overline{OP}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOP}$:

$x^2 = R^2 - r^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPO}$:

$x^2 = 9r^2 - R^2$

Igualant les dues expressions:

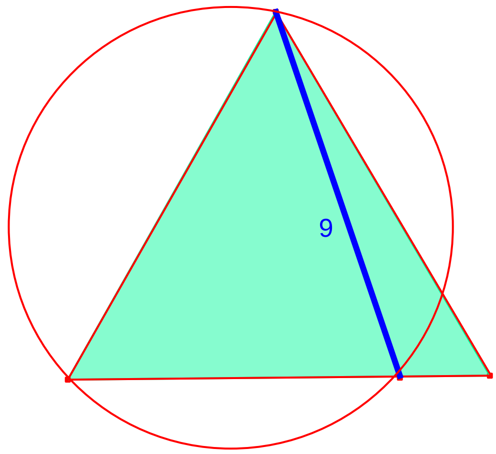
$R^2 - r^2 = 9r^2 - R^2$

$R^2 = 5r^2$

L’àrea groga és igual a l’àrea d’un semicercle de radi $3r$ més l’àrea d’un semicercle de radi r

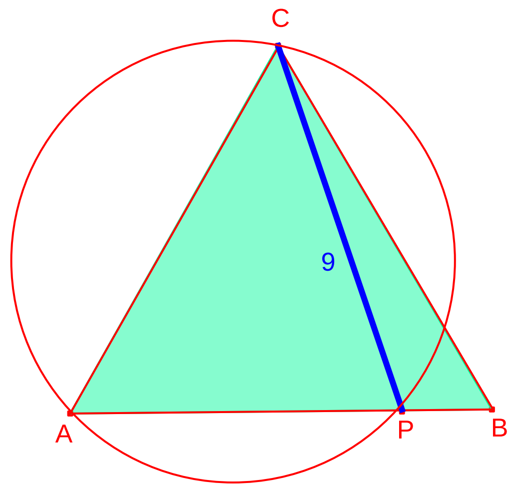
$S_{groga} = \frac{1}{2}\pi \cdot 9r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = 5\pi r^2 = \pi R^2 = 20$

3225.- En la figura el triangle ombrejat és equilàter.
Calculeu l'àrea del cercle.



Solució 1:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga $\overline{CP} = 9$
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{APC}$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\frac{9}{\sin 60°} = 2R$$

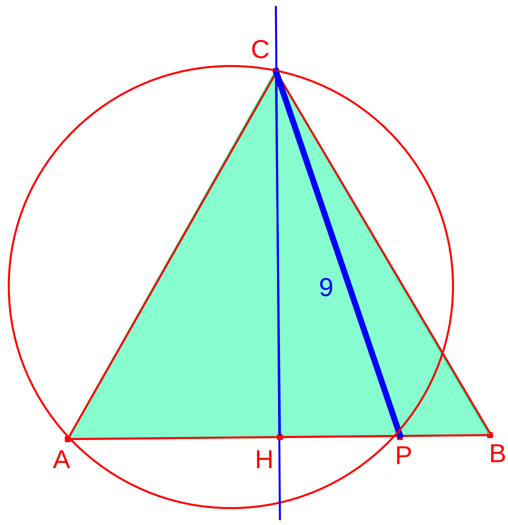
$R = 3\sqrt{3}$

L'àrea del cercle és:

$S = \pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\pi$

Solució 2:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga $\overline{CP} = 9$
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{APC}$
Siga $\overline{AH} = x$
$\overline{AC} = 2x, \overline{CH} = x\sqrt{3}$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APC}$ és:

$$\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{81 - 3x^2}\right)x\sqrt{3} = \frac{9\left(x + \sqrt{81 - 3x^2}\right)x\sqrt{3}}{4R}$$

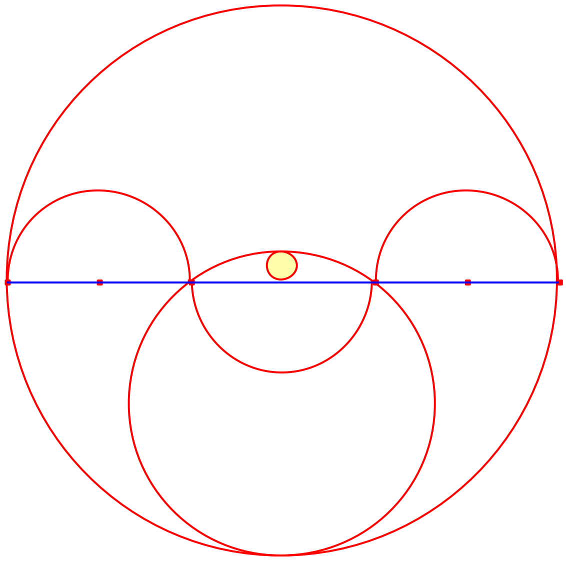
Simplificant:

$R = 3\sqrt{3}$

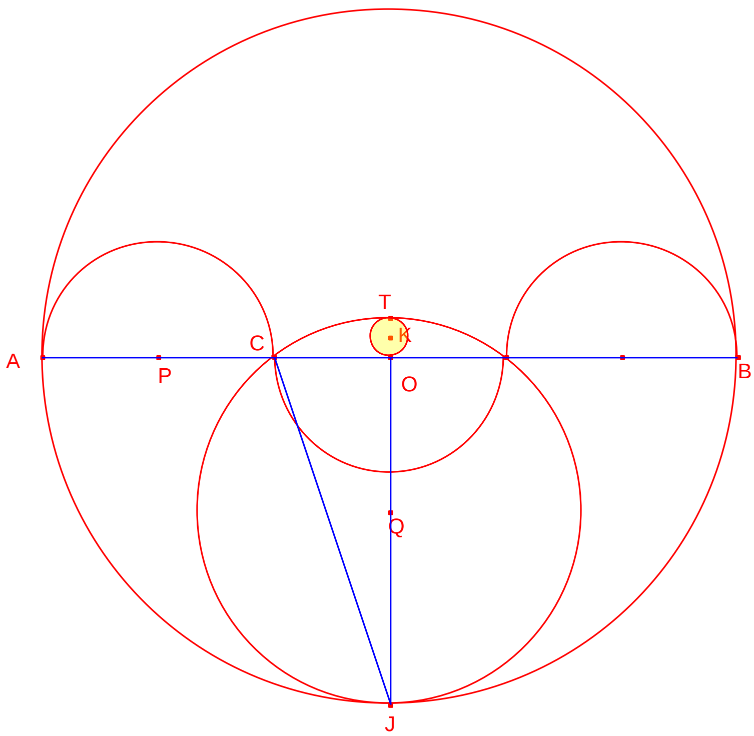
L'àrea del cercle és:

$S = \pi\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\pi$

3226.- En la figura hi ha 3 semicercles iguals i tres cercles.
Calculeu la proporció entre les àrees del cercle menut i el gran.



Solució:



$AP=r$, $OA=3r$

$JC=x$

$x=\text{sqrt}(10)\cdot r$

$QJ=s$

$(1/2)2r\cdot 3r=x^2/(4s)$

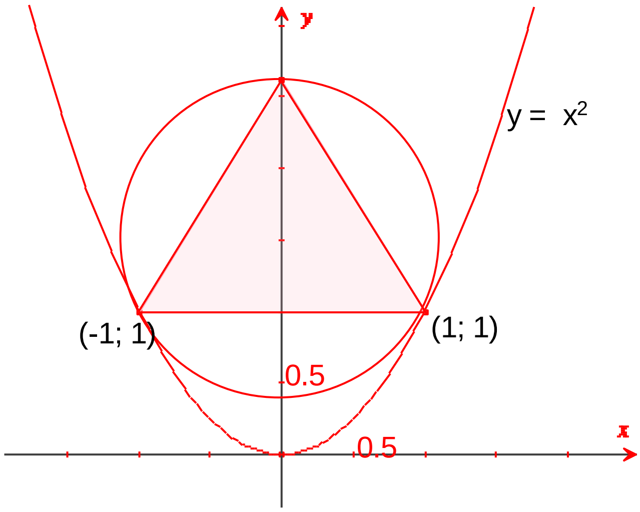
$s=(5/3)r$

$KT=t$

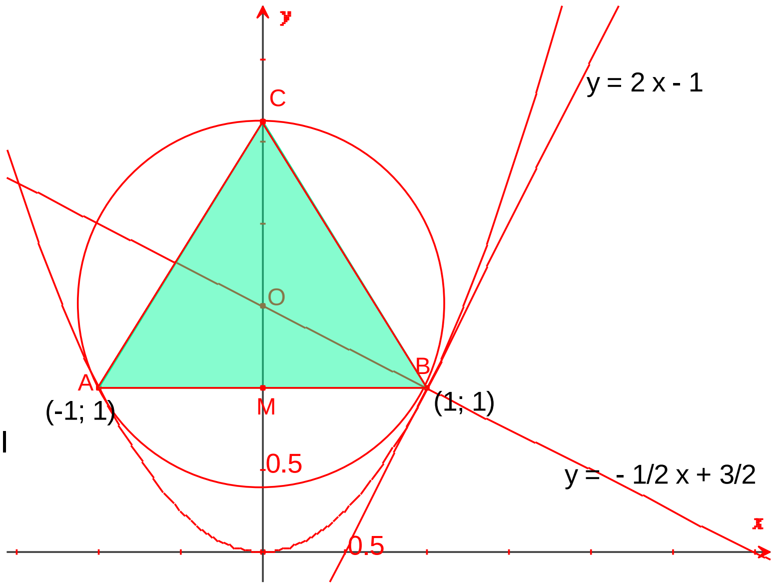
$t=2s-3r=(1/6)r$

Proporció:
$((1/6r)^2/(3r)^2=1/324$

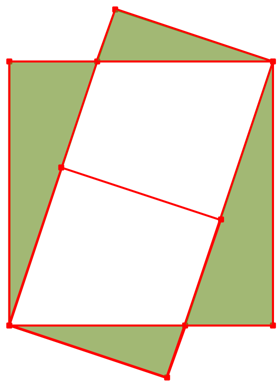
3227.- Donada la paràbola $y = x^2$ el dibuixa una circumferència tangent en els punts $(-1,1), (1,1)$
Determineu l'àrea del triangle ombrejat.



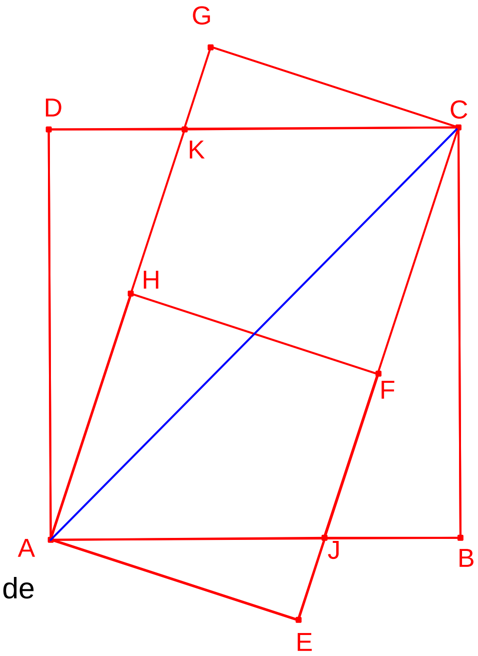
Solució:
El centre de la circumferència tangent és igual al punt intersecció de la recta normal a la paràbola en el punt $B(1,1)$
El pendent de la recta tangent és:
$f'(1) = 2$
La recta tangent té equació:
$y - 1 = 2(x - 1)$
$y = 2x - 1$
La recta normal té pendent $m = -\frac{1}{2}$
La recta normal té equació:
$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$
Siga O el centre de la circumferència.
Les coordenades és calculen resolent el sistema:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$
Les coordenades són:
$$O\left(0, \frac{3}{2}\right)$$
Siga r el radi de la circumferència.
$$r = \overline{OB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{1}{2}$$
$$\overline{MC} = \overline{OM} + r = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$$
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Phi = \Phi$$



3228.- La figura està formada per tres quadrats, els menuts són iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.

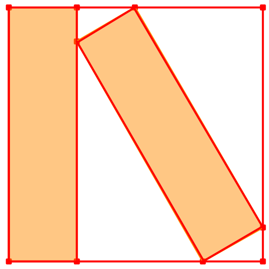


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siguen els quadrats iguals $AEFH, HFCG$ de costat $\overline{AE} = c$
$\overline{AC}^2 = 2 = 5c^2$
$c^2 = \frac{2}{5}$
Siga $\overline{DK} = x$

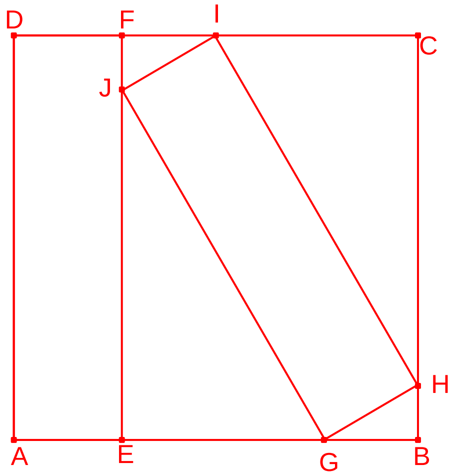


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADK}, \overset{\Delta}{CGK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{1}{3}$$
$$\overline{AK} = \sqrt{1+x^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADK}, \overset{\Delta}{CGK}$ són semblants, aleshores, les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:
$$\frac{S_{CGK}}{S_{ADK}} = \left(\frac{\overline{CK}}{\overline{AK}}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}}\right)^2 = \frac{2}{5}$$
Aleshores:
$$S_{ADK} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, S_{CGK} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$
L'àrea total és:
$$S_{total} = 2 \cdot S_{AEFG} + 2 \cdot S_{ADK} = 2c^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{17}{15}$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CGK} + 2 \cdot S_{ADK} = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{7}{17}$$

3229.- En un quadrat s'han inscrit dos rectangles iguals. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos rectangles i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els rectangles $AEFD, GHIJ$ de costats $\overline{AE} = \overline{GH} = 1, \overline{AD} = \overline{JG} = c$
Siga $\overline{FI} = x, \overline{FJ} = y$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IFJ}, \overset{\Delta}{JEG}$ són semblants i de raó $1 : c$
Aleshores:
$\overline{EG} = cy, \overline{EJ} = cx = c - y$

$$c = \frac{y}{1 - x}$$

$$c = 1 + cy + x$$

$$c = \frac{1 + x}{1 - y}$$

$$\frac{y}{1 - x} = \frac{1 + x}{1 - y}$$

Simplificant:

$$y - y^2 = 1 - x^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IFJ}$:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} y - y^2 = 1 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

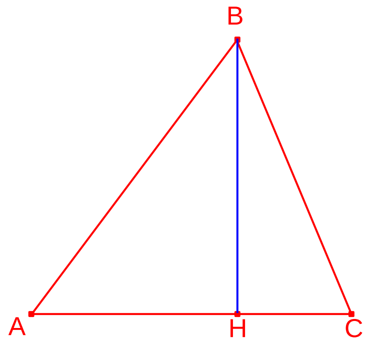
$$c = \frac{1 + x}{1 - y} = 2 + \sqrt{3}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{2S_{AEFD}}{S_{ABCD}} = \frac{2c}{c^2} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

3230.- L'altura h_b i els costats a, b, c d'un triangle són tres nombres naturals consecutius (en aquest ordre).
Calculeu l'àrea del triangle.

Solució:
Siguen $h_b = x, a = x + 1, b = x + 2, c = x + 3$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (amb la fórmula d'Heró) és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x+2)x = \frac{\sqrt{3(x+2)(x+4)(x+2)x}}{4}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$4x = 3(x+4)$
Resolent l'equació:
$x = 12$
L'àrea del triangles és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x+2)x = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$