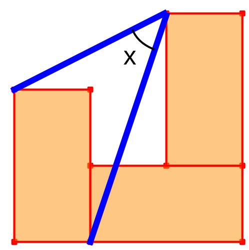
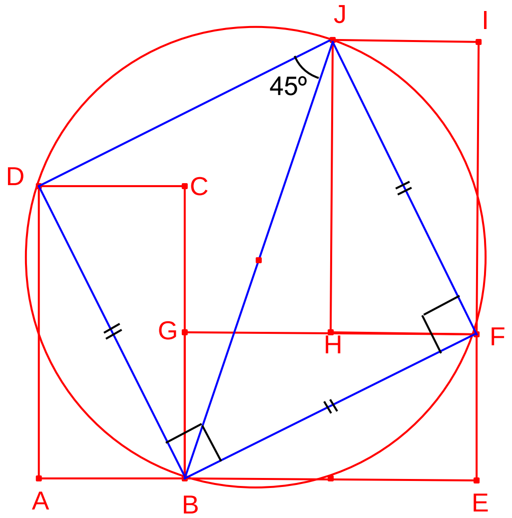
3231.- Donats tres rectangles iguals, calculeu la mesura de l'angle x

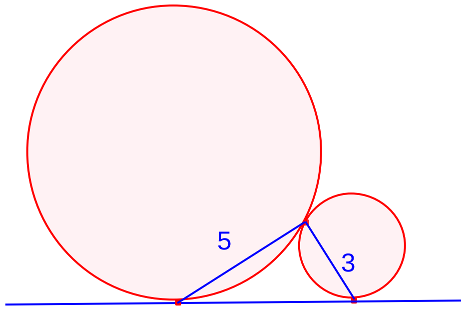


Solució:

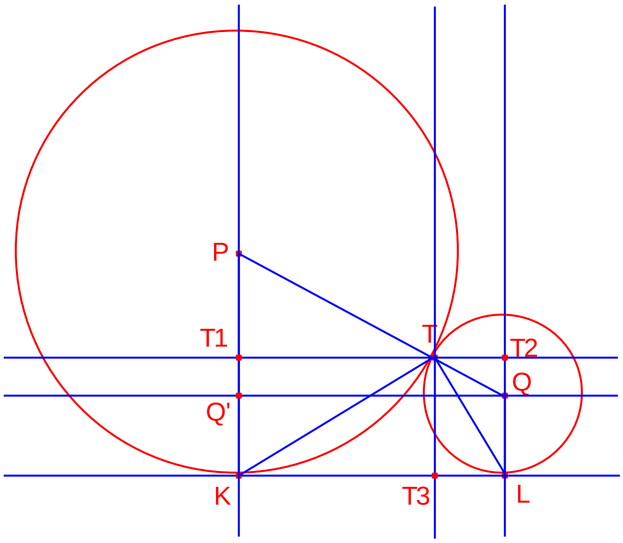


Siguen els rectangles iguals $ABCD. GBEF, HFIJ$
$\overline{BD} = \overline{BF} = \overline{FJ}, \angle DBF = 90°, \angle BFJ = 90°$
Aleshores, $BFJK$ és un quadrat.
Aleshores, $x = \angle DJB = 45°$

3232.- Dues circumferències tangents són tangents a una recta.
Les distàncies dels punts de tangència de la recta fins al punt de tangència entres les dues circumferències són 5 i 3.
Calculeu l'àrea total dels dos cercles.



Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PT} = R$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = \overline{QL} = r$

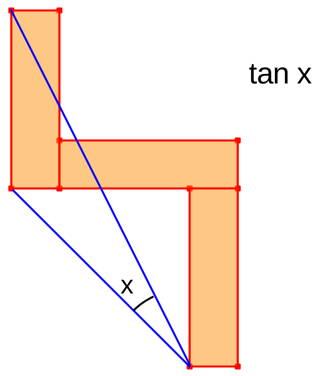


Siga Q' l projecció de Q sobre $\overline{PK}$
$\overline{PQ} = R + r, \overline{PQ'} = R - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle
$\overset{\Delta}{PQ'Q}$:
$\overline{QQ'} = \overline{KL} = 2\sqrt{Rr}$

Siga T_1 la projecció de T sobre $\overline{PK}$
Siga T_2 la projecció de T sobre $\overline{QL}$
Siga T_3 la projecció de T sobre $\overline{KL}$

Siga $a = \overline{TT_3} = \overline{T_1K} = \overline{T_2L}$
$\overline{T_1P} = R - a$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles
$\overset{\Delta}{PT_1T}, \overset{\Delta}{Q'T_1T}$
$R^2 - (R-a)^2 = 5^2 - a^2$
$2Ra = 25$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{LT_2T}, \overset{\Delta}{QT_2T}$
$r^2 - (a-r)^2 = 3^2 - a^2$
$2ra = 9$
Dividint les dues expressions:
$$\frac{R}{r} = \frac{25}{9}$$
$$a = \frac{9}{2r}$$
$$\overline{TT_1} = \sqrt{5^2 - a^2} = \frac{\sqrt{100r^2 - 81}}{2r}, \overline{TT_2} = \sqrt{9^2 - a^2} = \frac{\sqrt{36r^2 - 81}}{2r}$$
$$2\sqrt{Rr} = \frac{\sqrt{100r^2 - 81}}{2r} + \frac{\sqrt{36r^2 - 81}}{2r}$$
$$2 \cdot \frac{5}{3} r = \frac{\sqrt{100r^2 - 81}}{2r} + \frac{\sqrt{36r^2 - 81}}{2r}$$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{3\sqrt{34}}{10}, R = \frac{5\sqrt{34}}{6}$$
La suma de les àrees dels dos cercles és:
$$S = \pi(R^2 + r^2) = \frac{6001}{225}\pi$$

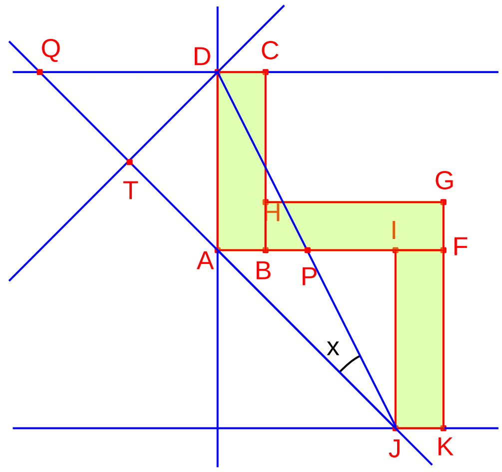
3233.- Donats tres rectangles iguals, calculeu $\tan x$



Solució:
Siguen els rectangles iguals $ABCD.HBFG,JKFI$ de costats $\overline{AB}=a,\overline{AD}=b$
$\overline{AI}=b$

El triangle $\overset{\Delta}{AIJ}$ és rectangle i isòsceles.
Siga P la intersecció del segments $\overline{AF},\overline{JD}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAP},\overset{\Delta}{JIP}$ són iguals.
Aleshores:
$\overline{AP}=\overline{IP}=\dfrac{1}{2}b$

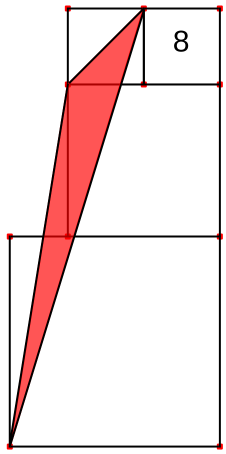


Siga Q la intersecció de les rectes AJ,CD
$\overline{QD}=\overline{AD}=b$

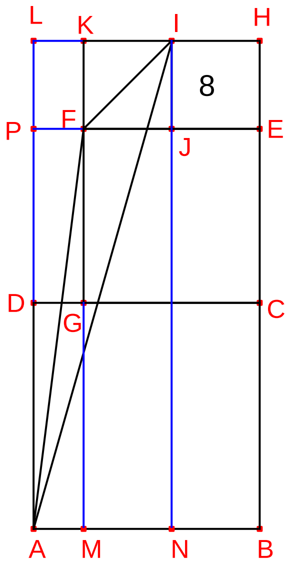
Siga T la projecció de D sobre la recta $\overline{AJ}$
$\overline{DT}=\overline{AT}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$
$\overline{AJ}=b\sqrt{2}$
$\overline{JT}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}b$

$$\tan x=\frac{\overline{DT}}{\overline{JT}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}b}{\frac{3\sqrt{2}}{2}b}=\frac{1}{3}$$

3234.- La figura està formada per quatre quadrats.
El superior de la dreta té àrea 8.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siguen els quadrats $FJIK, JEHI$ d'àrea 8 i costat $\overline{FJ} = 2\sqrt{2}$
Siga el quadrat $GCEF$ de costat $\overline{GE} = 4\sqrt{2}$

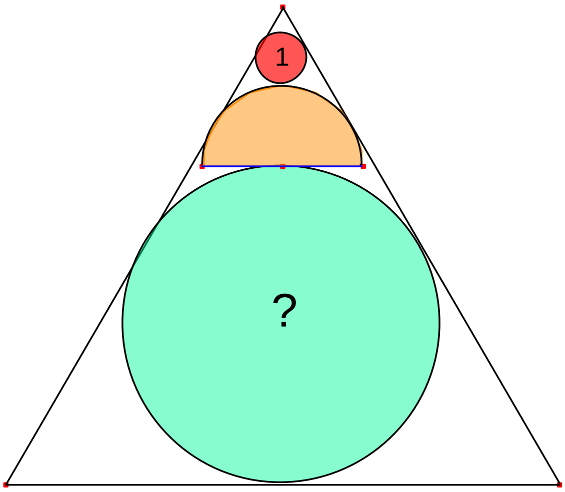
$\overline{AM} = a - 4\sqrt{2}, \overline{AP} = a + 4\sqrt{2}, \overline{LI} = a - 2\sqrt{2}, \overline{AL} = a + 6\sqrt{2}$

L'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{AFI}$ és:

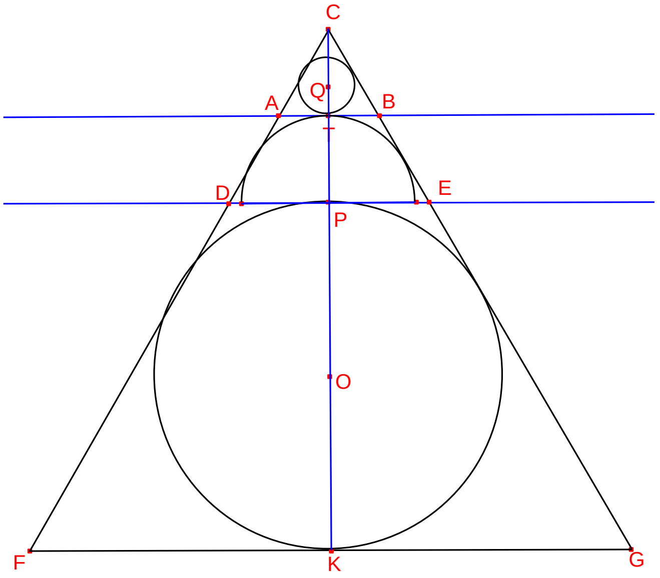
$S_{AFI} = S_{ALI} - (S_{APF} + S_{PFKL} + S_{FKI}) =$

$= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{2})(a + 6\sqrt{2}) - \left(\frac{1}{2}(a + 4\sqrt{2})(a - 4\sqrt{2}) + (a - 4\sqrt{2})2\sqrt{2} + \frac{1}{2}8\right) = 16$

3235.- En la figura, dins d'un triangle equilàter hi ha dos cercles i un semicercle.
El cercle menut té àrea 1.
Calculeu l'àrea del cercle major.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$ que té la circumferència inscrita de centre Q i radi $\overline{QT} = s$ i àrea del cercle 1.
$\overline{CT} = 3s$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEC}$ de costat $\overline{DE} = d$ que té la semicircumferència inscrita de centre P i radi $\overline{PT} = r$

$$d = \frac{4}{\sqrt{3}}r$$

$$r + 3s = \frac{\sqrt{3}}{2}d = 2r$$

$$r = 3s$$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{EFC}$ que té la circumferència inscrita de centre O i radi $\overline{OP} = R$

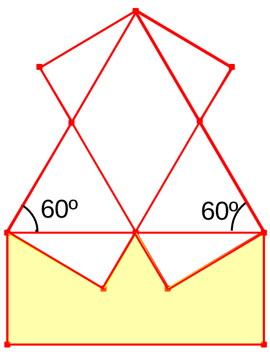
$$\overline{AK} = 3R = 2R + r + 3s$$

$$R = r + 3s$$

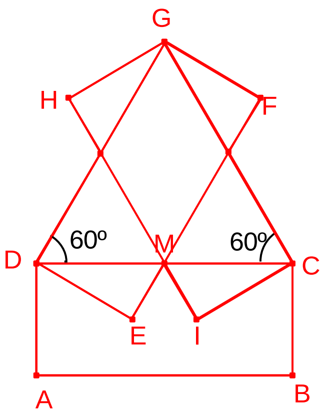
La circumferència de centre O i la circumferència de centre Q són semblants i les àrees del cercle són proporcionals als quadrats dels radis.

$$\frac{S_O}{S_Q} = S_Q = \left(\frac{R}{s}\right)^2 = \left(\frac{3s + r}{s}\right)^2 = \left(\frac{6s}{s}\right)^2 = 36$$

3236.- En la figura hi ha tres rectangles iguals. Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:



Siguen els rectangles iguals $ABCD, EFGD, CGHI$ de costats $\overline{AB} = b, \overline{AD} = a$

Siga M el punt mig del segment $\overline{DC}$

$$\overline{DM} = \frac{1}{2}b$$

$$\overline{EM} = \frac{1}{2}\overline{DM} = \frac{1}{4}b, a = \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{4}b$$

L'àrea total és:

$$S_{total} = S_{DCG} + 2 \cdot S_{DEM} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b = \frac{9\sqrt{3}}{16}b^2$$

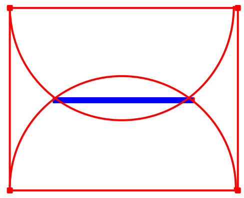
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{DEM} = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}b = \frac{3\sqrt{3}}{16}b^2$$

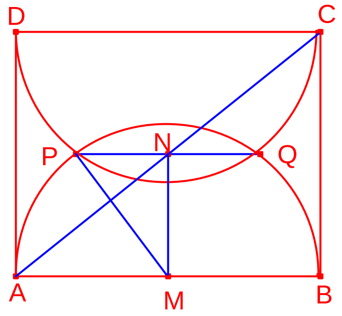
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}b^2}{\frac{9\sqrt{3}}{16}b^2} = \frac{1}{3}$$

3237.- En un rectangle de costats 10, 8.
Calculeu la longitud del segment format per la intersecció de les dues semicircumferències.



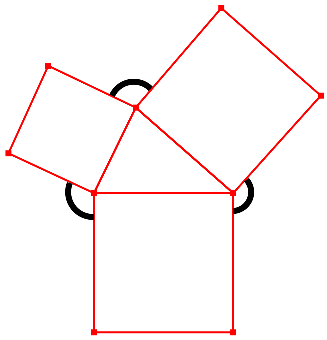
Solució:
Siga el rectangles $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10, \overline{AD} = 8$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$, centre dels semicercle inferior.
Siguen P, Q els punts intersecció dels dos semicercles.
Siga N el punt mig del segment $\overline{PQ}$ centre del rectangle $ABCD$.



$\overline{MP} = 5, \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNP}$:
$\overline{PN} = 3$
$\overline{PQ} = 6$

3238.- Sobre l’exterior dels costats d’un triangle s’han dibuixat tres quadrats.
Calculeu la mesura de la suma dels tres angles remarcats.



Solució:

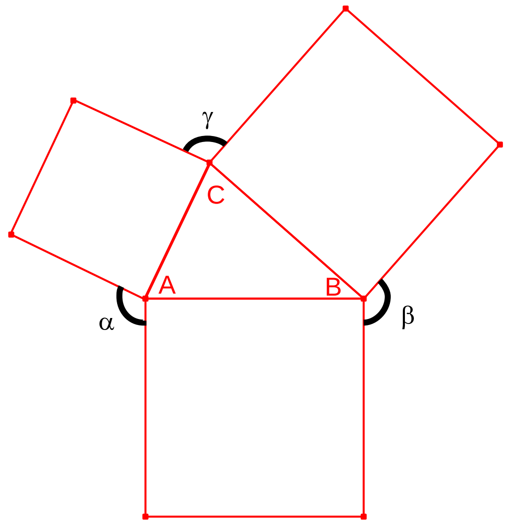
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$A+\alpha = 180°, B+\beta = 180°, C+\gamma = 180°, A+B+C = 180°$

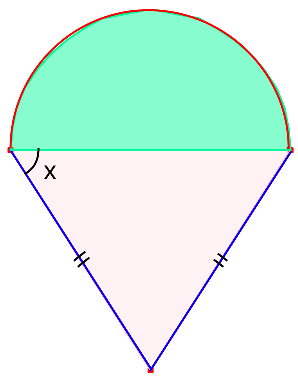
$A+\alpha+\ B+\beta+C+\gamma = 3\cdot 180°$

$\alpha+\beta+\gamma+180° = 3\cdot 180°$

$\alpha+\beta+\gamma = 360°$

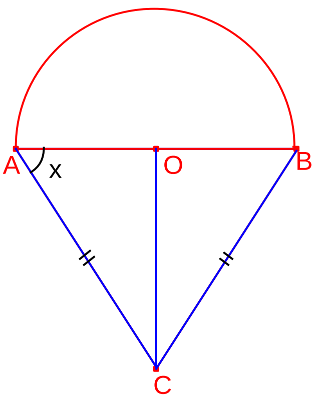


3239.- En la figura, el semicercle i el triangle isòsceles tenen la mateixa àrea.
Calculeu el valor de la $\tan x$



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC}$
Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$.
Siga $h = \overline{OC}$ altura del triangle.



El semicercle i el triangle isòsceles tenen la mateixa àrea, aleshores:

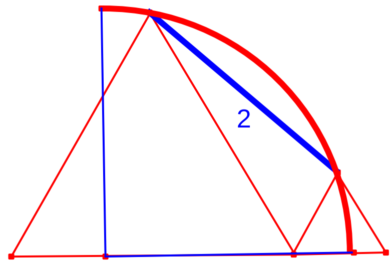
$$\frac{1}{2}\pi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h$$

Simplificant:

$$\tan x = \frac{h}{R} = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \arctan\frac{\pi}{2} \approx 57°31'6"$$

3240.- La distància entre els dos vèrtexs dels dos triangles equilàters de la figura mesura 2.
S’ha dibuixat un quadrant que passa per aquests vèrtexs.
Calculeu l’àrea del quadrant.



Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$, $\overline{CE} = 2$
Siga el quadrant de centre O que passa per C, E
Considerem la circumferència que conté el quadrant.
Siga $C’$ el simètric de C respecte de $\overline{AB}$
$C’$ pertany a la circumferència.
$\angle CC'B = 30°$
Aleshores, $C’, B, E$ estan alineats.
Per tant,
$\angle COE = 60°$
El radi del quadrant és $\overline{OC} = 2$
L’àrea del quadrant és:
$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi$