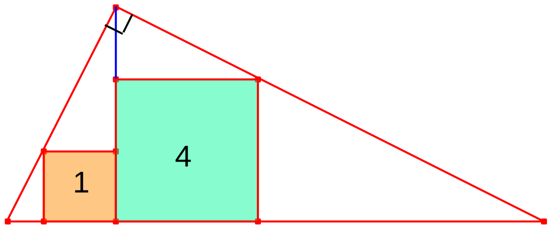
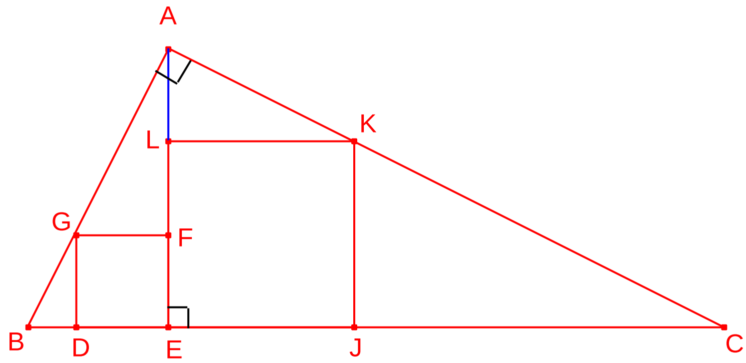
3241.- Sobre l'altura i la hipotenusa d'un triangle rectangle s'han dibuixat dos quadrats d'àrees 1, 4.

Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle rectangle exterior.



Solució:



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEB}, \overset{\Delta}{CEA}$ són semblants i de raó l'arrel quadrada de la proporció de les àrees, és a dir 1:2.
Siga $\overline{BE} = x$
Aleshores, $\overline{AE} = 2x, \overline{CE} = 4x$

$\overline{GF} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEB}, \overset{\Delta}{AFG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{1} = \frac{2x}{2x-1}$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{3}{2}$$

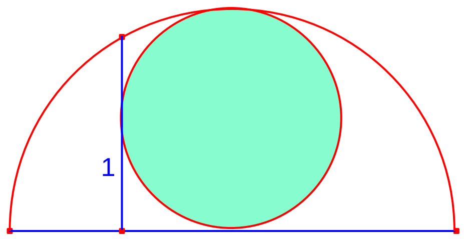
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 2x = 5x^2 = \frac{45}{4}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{1+4}{\frac{45}{4}} = \frac{4}{9}$$

3242.- En la figura, calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



Solució:

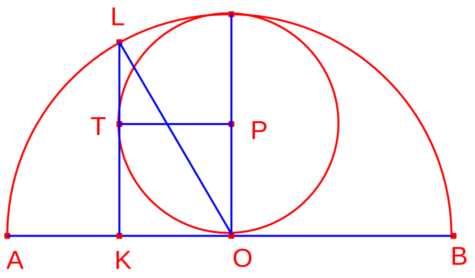
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = r$

$\overline{OA} = 2r$

Siga la tangent a la circumferència $\overline{KL} = 1$

$\overline{OK} = r, \overline{OL} = 2r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:

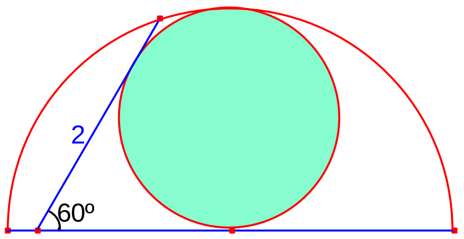
$4r^2 = r^2 + 1$

$r^2 = \frac{1}{3}$

L'àrea del cercle és:

$S = \pi r^2 = \frac{\pi}{3}$

3243.- En la figura, calculeu l'àrea del cercle ombrejat.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = r$

$\overline{OA} = 2r$

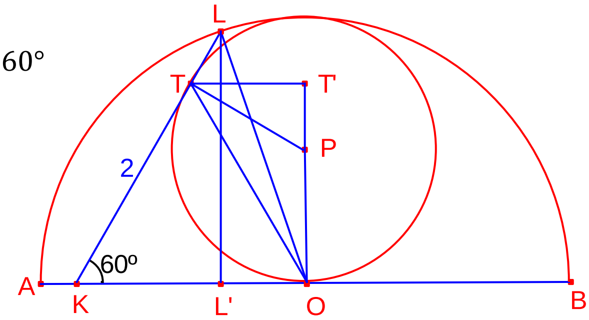
Siga la tangent a la circumferència $\overline{KL} = 2, \angle LKO = 60°$

Siga $\overline{OK} = a, \overline{OT} = a$

Siga T' la projecció de T sobre OP.

$\overline{PT'} = \frac{1}{2}r, \overline{TT'} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$

$a = 2 \cdot \overline{TT'} = r\sqrt{3}$



Siga L' la projecció de L sobre $\overline{AB}$.

$\overline{KL'} = 1, \overline{LL'} = \sqrt{3}, \overline{OL'} = a - 1 = r\sqrt{3} - 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OL'L}$:

$4r^2 = \left(r\sqrt{3} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

$r^2 + 2\sqrt{3}r - 4 = 0$

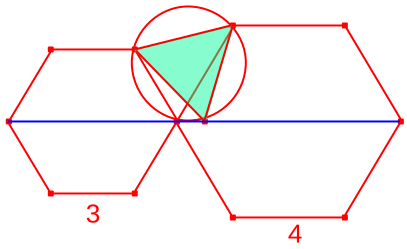
Resolent l'equació:

$r = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

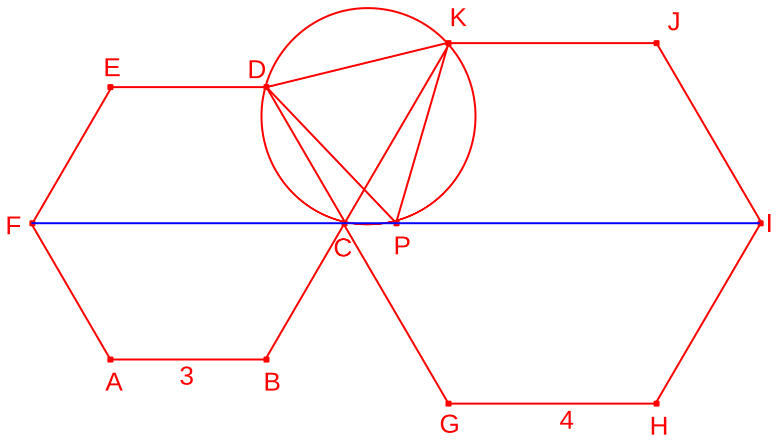
L'àrea del cercle és:

$S = \pi r^2 = \pi\left(10 - 2\sqrt{21}\right)$

2344.- Dos hexàgons regulars de costats 3 i 4 tenen un vèrtex en comú i tres vèrtex alineats.
La circumferència de la figura passa per tres vèrtex dels hexàgons.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siguen els hexàgons regulars $ABCDEF, CGHIJK$ de costats $\overline{AB} = 3, \overline{GH} = 4$

Siga P la intersecció de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{DCK}$ i la diagonal $\overline{CI}$.

$\angle DPK = \angle DCK = 60°$

$\angle DKP = 180° - \angle DCP = 60°$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DPK}$ és equilàter.

Siga $\overline{DK} = x$

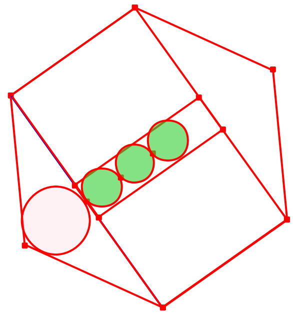
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DCK}$

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

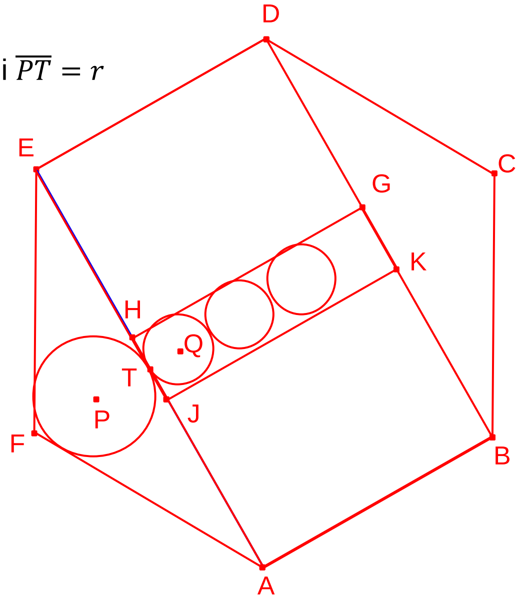
L’àrea triangle $\overset{\Delta}{DPK}$ és:

$$S_{DPK} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

3245.- En un hexàgon regular s'han dibuixat sobre dos costats oposats dos quadrats.
Proveu que l'àrea del cercle rosa és igual a la suma de les àrees dels cercles verds.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els quadrats $AEGH, DEJK$.



Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ de radi $\overline{PT} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = s$

$$\overline{FT} = \frac{1}{2}c, \overline{AE} = c\sqrt{3}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot c\sqrt{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot c \cdot r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

L'àrea del cercle de centre P és:

$$S_P = \pi r^2 = \frac{21-12\sqrt{3}}{4}\pi$$

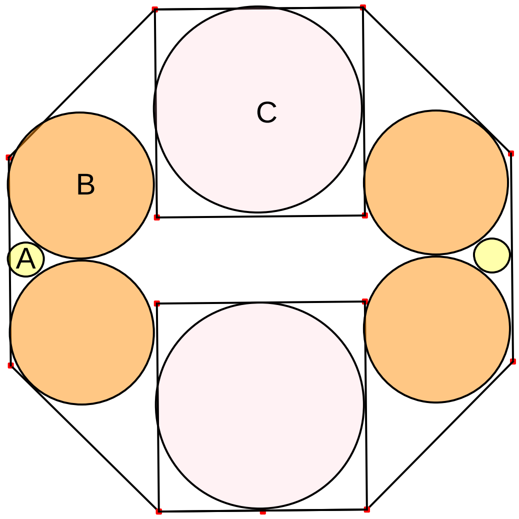
$$\overline{HJ} = 2c - \overline{AE} = \left(2-\sqrt{3}\right)c$$

$$s = \frac{1}{2}\overline{HJ} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}c$$

L'àrea de la suma de les tres circumferències de radi s és

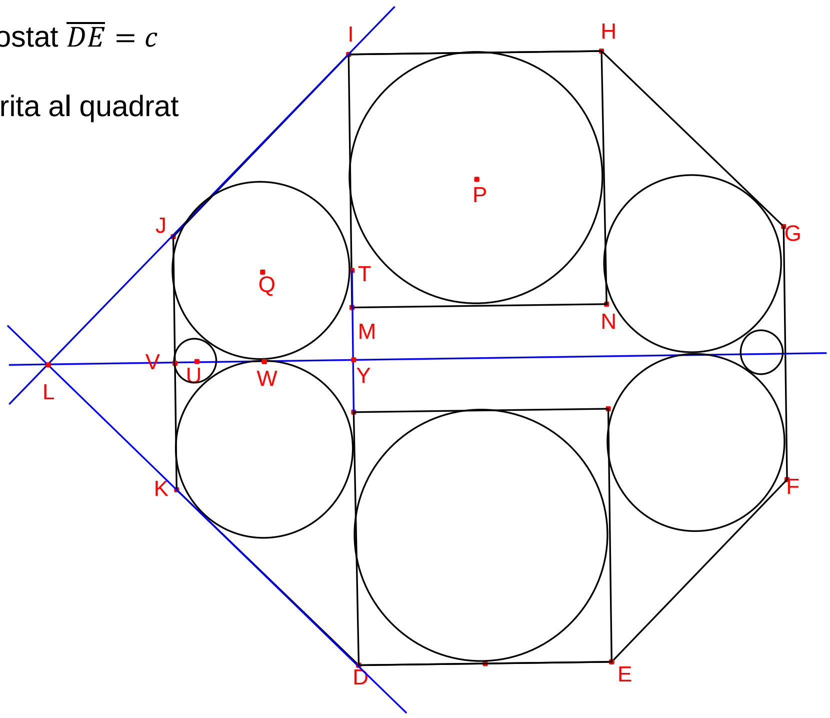
$$S_3 = 3\pi s^2 = \frac{21-12\sqrt{3}}{4}\pi$$

3246.- La figura està formada per un octògon regular, dos quadrats i tres tipus de cercles d'àrees A, B, C.
Calculeu la raó, $A : B : C$



Solució:
Siga l'octògon regular $DEFGHIJK$ de costat $\overline{DE} = c$
Siga el quadrat HIMN de costat $\overline{HI} = c$
Siga r el radi de la circumferència inscrita al quadrat $HIMN$.

$$r = \frac{1}{2}c$$



Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{DIY}$ de centre Q i radi $\overline{QT} = s$

$$\overline{DI} = (1 + \sqrt{2})c$$

$$\overline{LY} = \overline{IY} = \frac{1}{2}\overline{DI} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{IL} = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)c$$

$$s = \frac{2\left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)c - \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}c$$

Siga la circumferència de centre U i radi $\overline{UV} = t$
$\overline{QU} = s + t, \overline{QW} = s,$

$$\overline{UW} = \frac{\sqrt{2}}{2}c - (s + t)$$

Apliant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{UWQ}$:

$$(s + t)^2 = s^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c - (s + t)\right)^2$$

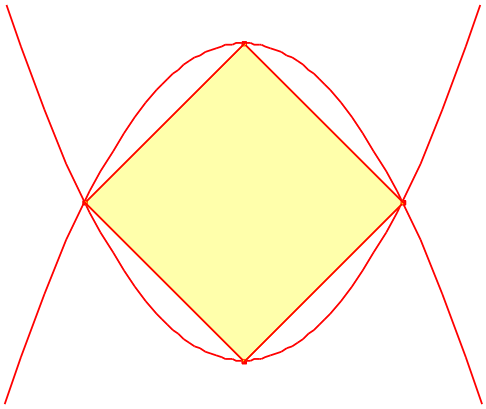
Resolent l'equació:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{16}c$$

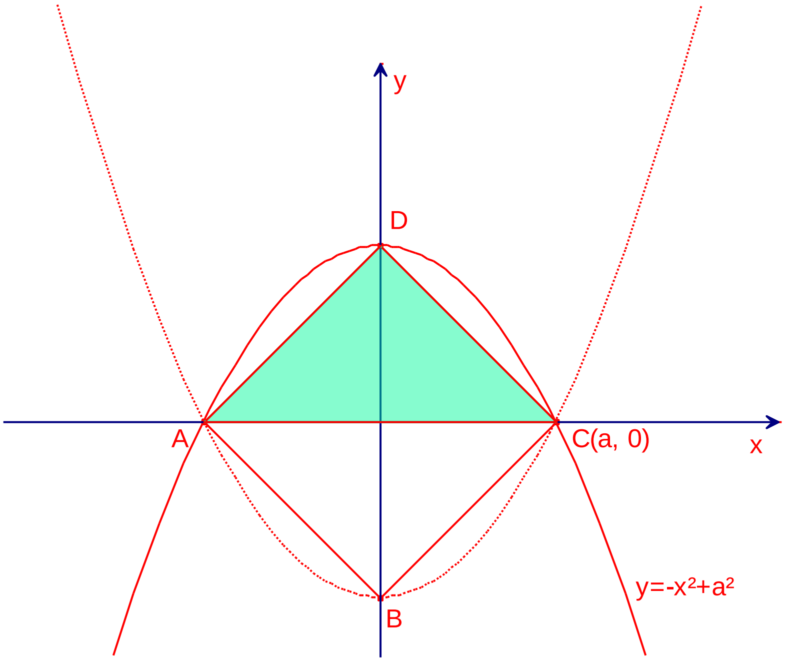
La proporció de les àrees dels tres cercles és igual a la proporció dels quadrats dels radis dels cercles:

$$A : B : C = \left(\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 : 16 : 32$$

3247.- En la intersecció de dues paràboles s'ha inscrit un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat i l'àrea afitada per les dues paràboles.



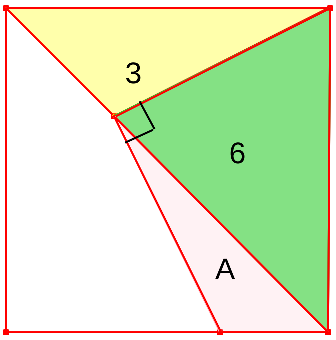
Solució:



Aprofitant la propietat d'Arquimedes de l'àrea de la paràbola:

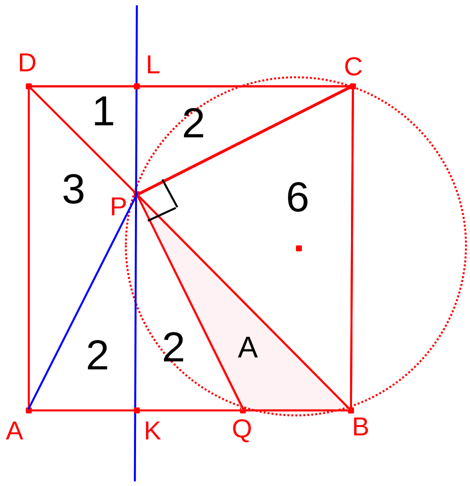
$$\frac{S_{ACD}}{S_{arc}}=\frac{S_{ACD}}{\frac{4}{3}S_{ACd}}=\frac{3}{4}$$

3248.- Un punt sobre la diagonal d'un quadrat divideix la meitat del quadrat en dos triangles d'àrees 3 i 6.
Determineu l'àrea del triangle ombrejat A.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ d'àrea 18

Els triangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CPD}$ són iguals, aleshores:
$\overline{AP} = \overline{CP}$
$S_{APD} = S_{CPD} = 3$
$\frac{S_{BCP}}{S_{DCP}} = \frac{6}{3} = 2$
Aleshores, $\overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{BP}$
Siguen K, L les projeccions de P sobre els costats $\overline{AB}, \overline{CD}$
Aleshores,
$\overline{LP} = \frac{1}{2}\overline{KP}, \overline{DL} = \frac{1}{2}\overline{CL}$
Aleshores,
$S_{DLP} = 1, S_{CLP} = 2$



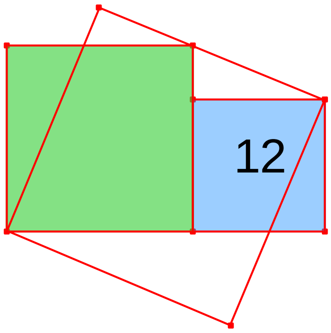
$S_{AKP} = 2 \cdot S_{DLP} = 2$
El quadrilàter $BCPQ$ és inscriptible en una circumferència ja que té els angles oposats suplementaris.
$\angle PCQ = \angle PBQ = 45°$

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPQ}$ és isòsceles.
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{CP}$

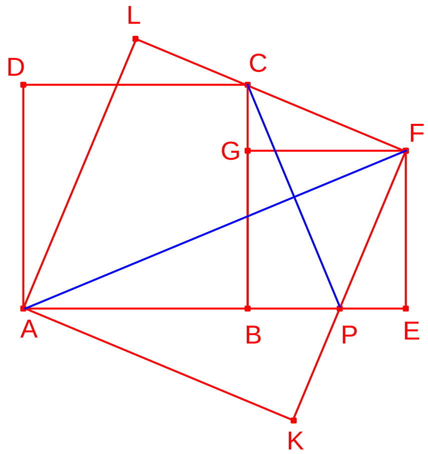
Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és isòsceles.
$S_{AKP} = S_{AKP} = 2$

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QBP}$ és:
$A = S_{QBP} = 9 - (S_{APD} + S_{AQP}) = 9 - (3 + 4) = 2$

3249.- Dels tres quadrats de la figura el menut té àrea 12.
Calculeu l'àrea del quadrat verd.

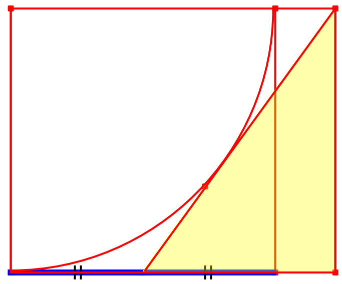


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$
Siga el quadrat $BEFG$ d'àrea 12, $\overline{BE} = 2\sqrt{3}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CGF}, \overset{\Delta}{PEF}$ són igual (ACA)
Aleshores, $\overline{CF} = \overline{PF}$
$\overline{CG} = \overline{PE} = c - 2\sqrt{3}$
El triangle $\overset{\Delta}{CFP}$ és rectangle i isòsceles.
$\angle AFL = 45°$
Aleshores, el segments $\overline{AF}$ és mediatriu del segment $\overline{CP}$
Aleshores, $\overline{AC} = \overline{AP}$
$\overline{AP} = \overline{AE} - \overline{PE} = c + 2\sqrt{3} - \left(c - 2\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$

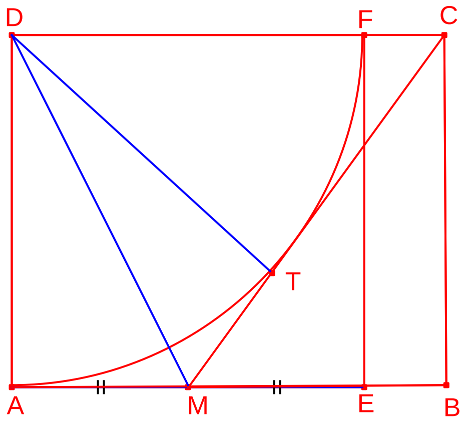


$c\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$
$$c = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = 24$

2350.- En la figura s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el quadrat $AEFD$ de costat $\overline{AD} = 2c$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AE}$
Siga $\overline{BM} = x$
$\overline{AM} = \overline{TM} = c$
$\angle ADM = \alpha$
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$



$\angle MBC = 2\alpha$
$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$
$\tan 2\alpha = \frac{2c}{x} = \frac{4}{3}$

$x = \frac{3}{2}c$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}x\cdot 2c}{(c+x)2c} = \frac{x}{2(c+x)} = \frac{\frac{3}{2}c}{2\left(1+\frac{3}{2}\right)c} = \frac{3}{10}$$