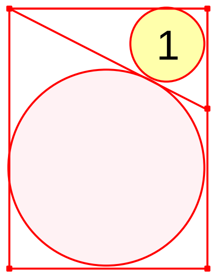
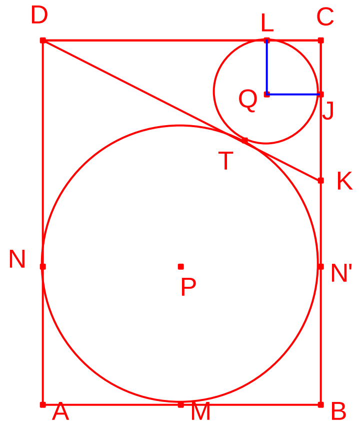
Problemes de Geometria per a l'ESO 326

3251.- En un rectangle s'ha inscrit dues circumferències tangents i tangents a un segment.
Si l'àrea del cercle menut (groc) és 1, calculeu l'àrea del cercle gran (rosa)



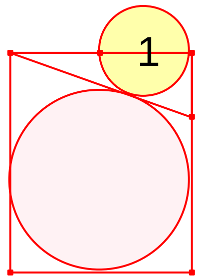
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PM}=\overline{PN}=\overline{PN'}=\overline{PT}=a$
Siga el cercle de centre Q i àrea 1. Siga $\overline{QJ}=\overline{QL}=\overline{QT}=1$
Siga $\overline{DN}=\overline{DT}=b, \overline{KT}=\overline{KN'}=\overline{KJ}=c$



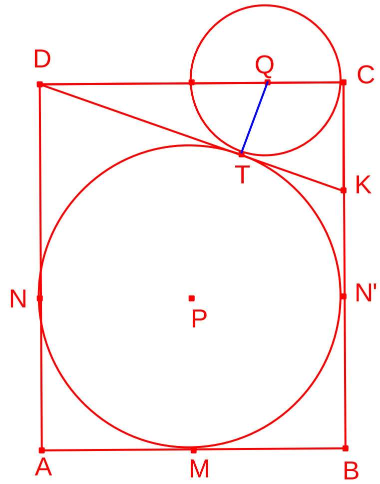
El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{DCK}$ compleix:
$$1=\frac{2a+1+c-(b+c)}{2}$$
Simplificant:
$2a-b=1, b=2a-1$
$\overline{AD}=\overline{BC}$, aleshores:
$a+b=a+2c+1$
Simplificant:
$b-2c=1, c=a-1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCK}$:
$(b+c)^2=(2a)^2+(1+c)^2$
Simplificant:
$a^2-3a+1=0$
Resolent l'equació:
$$a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
L'àrea del cercle de centre P és:
$$S_P=\pi a^2=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\pi\approx 21.5328$$

3252.- En un rectangle s'ha inscrit una circumferència i un semicercle tangents i tangents a un segment.
Si l'àrea del cercle menut (groc) és 1, calculeu l'àrea del cercle gran (rosa)



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PN} = \overline{PN'} = \overline{PT} = a$
Siga el cercle de centre Q i àrea 1. Siga $\overline{QC} = \overline{QT} = 1$
Siga $\overline{DN} = \overline{DT} = b, \overline{KT} = \overline{KN'} = \overline{KC} = c$

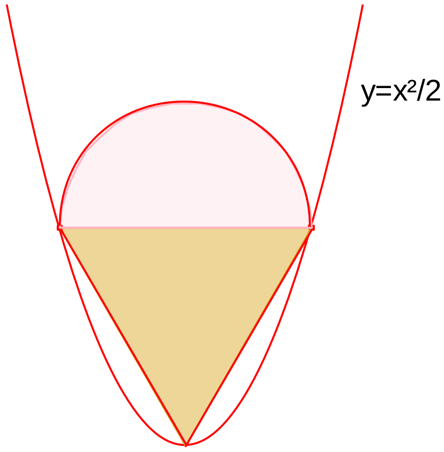


$\overline{AD} = \overline{BC}$, aleshores:
$a + b = a + 2c$
Simplificant:
$b = 2c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCK}$:
$(3c)^2 = (2a)^2 + c^2$
Simplificant:
$2c^2 = a^2$

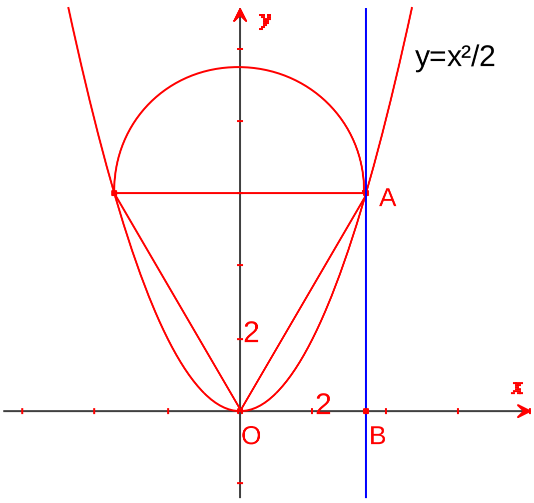
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DTQ}$:
$(2a - 1)^2 = 1 + b^2$
Simplificant:
$4a^2 - 4a = b^2 = 4c^2$
$4a^2 - 4a = 2a^2$
$2a^2 - 4a = 0$
$a = 2$
L'àrea del cercle de centre P és:
$S_P = \pi a^2 = 4\pi \approx 12.5664$

3253.- Donada la paràbola $y=\frac{x^2}{2}$ s'ha dibuixat un triangle equilàter i un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.

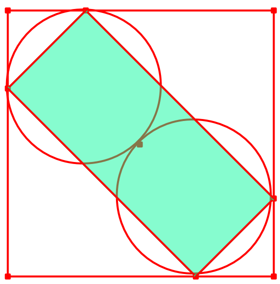


Solució:
Siga $B(a,0)$

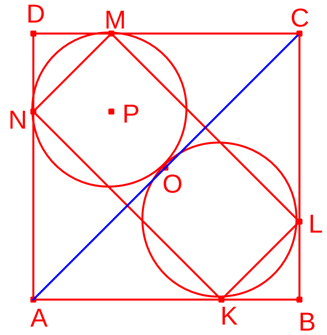
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBA}$:
$A(a,a\sqrt{3})$
El punt A pertany a la paràbola:
$A\left(a,\frac{a^2}{2}\right)$
Aleshores:
$\frac{a^2}{2}=a\sqrt{3}$
Resolent l'equació:
$a=2\sqrt{3}$
El semicercle de radi $a=2\sqrt{3}$ té àrea:
$S=\frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2=6\pi$



3254.- En un quadrat s’han inscrit dues circumferències tangents iguals i cadascuna tangent a dos costats consecutius.
Determineu la proporció entre l’àrea del quadrilàter format pels punts de tangència de les circumferències amb els costats del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.
El quadrilàter $KLMN$ és un rectangle.



Siga la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$ de radi, $\overline{PN} = \overline{PM} = \overline{PO} = r$

$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{DP} = r\sqrt{2}$

$\overline{OD} = r\sqrt{2} + r$

$(\sqrt{2} + 1)r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

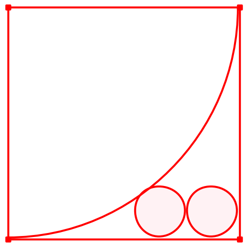
L’àrea del rectangle $KLMN$ és:

$S_{KLMN} = S_{ABCD} - (\overline{DM}^2 + \overline{CM}^2) = 1 - (r^2 + (1 - r)^2) = 2(r - r^2) = \sqrt{2} - 1$

La proporció d’àrees és:

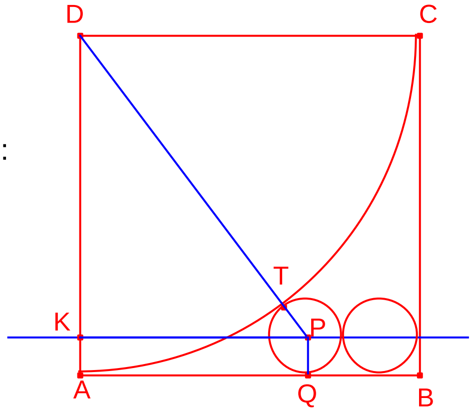
$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \sqrt{2} - 1$

3255.- La figura consta d'un quadrant en un quadrat unitari i dos cercles iguals tangents.
Calculeu el radi dels cercles.

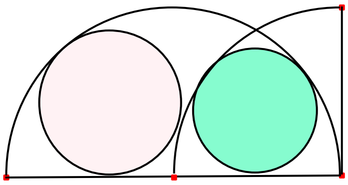


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PQ} = r$
Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$
$\overline{DK} = 1 - r, \overline{DP} = 1 + r, \overline{KP} = 1 - 3r$

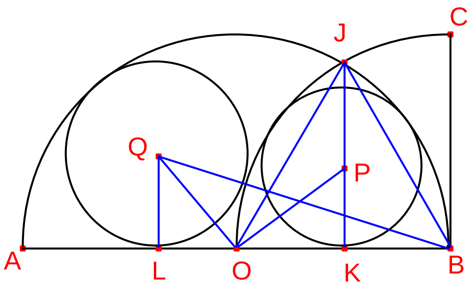
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKP}$:
$(1 + r)^2 = (1 - r)^2 + (1 - 3r)^2$
Simplificant:
$9r^2 - 10r + 1 = 0$
Resolent l'equació:
$r = \frac{1}{9}$



3256.- El semicercle i el quadrant de la figura tenen radi 1.
Calculeu el radi dels dos cercles.



Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrant de centre B i radi $\overline{BO} = \overline{BL} = 1$

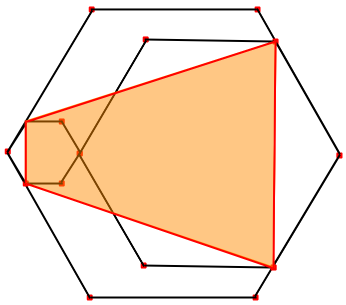


Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = r$
El triangle $\overset{\Delta}{OBL}$ és equilàter. Aleshores:
$\overline{OK} = \frac{1}{2}$
$\overline{OP} = 1 - r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:
$(1 - r)^2 = r^2 + \frac{1}{4}$
Resolent l'equació:
$r = \frac{3}{8}$

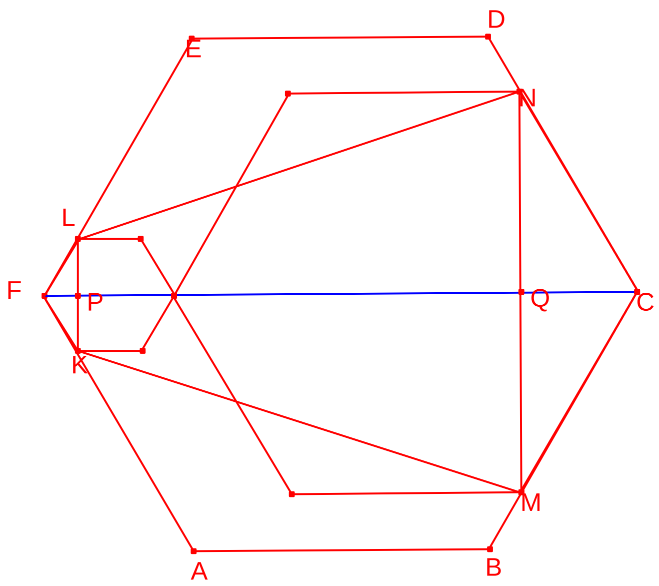
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QL} = s$
Siga $\overline{OL} = x$
$\overline{BL} = 1 + x, \overline{BQ} = 1 + s, \overline{OQ} = 1 - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLQ}$:
$(1 + s)^2 = s^2 + (1 + x)^2$
Simplificant:
$2s = x^2 + 2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLQ}$:
$(1 - s)^2 = s^2 + x^2$
Simplificant:
$1 - 2s = x^2$
Considerem el sistema:
$$\begin{cases} 2s = x^2 + 2x \\ 1 - 2s = x^2 \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} x = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ s = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

3257.- La figura està formada per tres hexàgons regulars.
Determineu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea de l'hexàgon exterior.



Solució:



AB=1

FL=c, CN=1-c

FP=c/2, KL=c·sqrt(3)

CQ=(1-c)/2, MN=(1-c)sqrt(3)

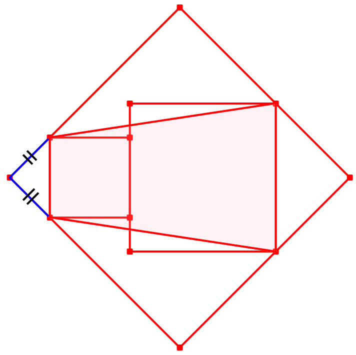
PQ=2-1/2=3/2

[KMNL]=(3/4)·sqrt(3)

[ABCDEF]=6/4·sqrt(3)

[KMNL]/[ABCDEF]=1/2

3258.- La figura està formada per tres quadrats.
Determineu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$.

$\overline{BD} = \sqrt{2}$

Siga $\overline{DN} = \overline{DK} = c, \overline{BL} = \overline{BM} = d$

$\overline{KN} = c\sqrt{2}, \overline{ML} = d\sqrt{2}$

$\overline{DP} = \frac{1}{2}c\sqrt{2}, \overline{BQ} = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$

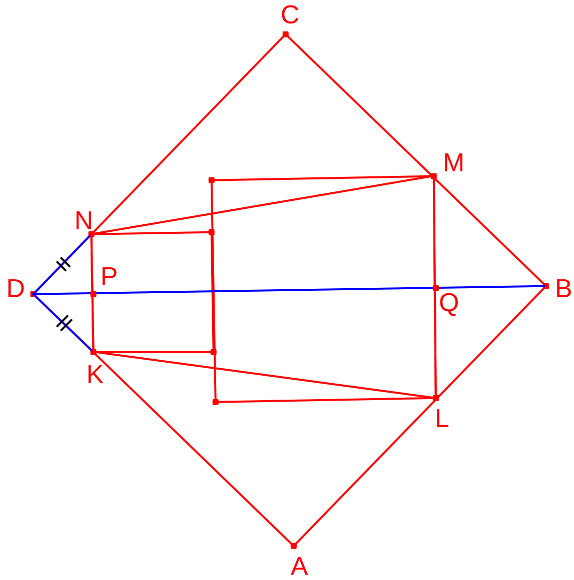
$\overline{PQ} = \sqrt{2} - (c+d)\frac{\sqrt{2}}{2} = (c+d)\sqrt{2}$

Simplificant:

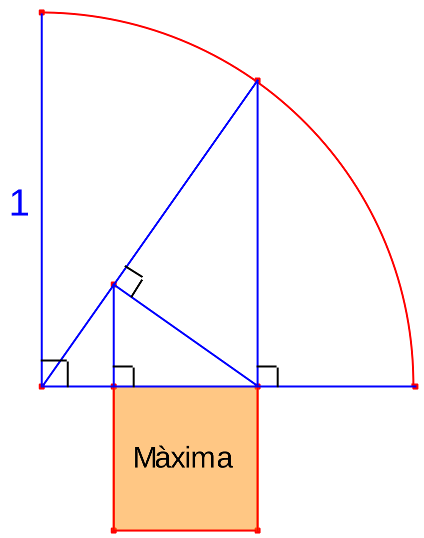
$c + d = \frac{2}{3}$

L'àrea del trapezi $KLMN$ és:

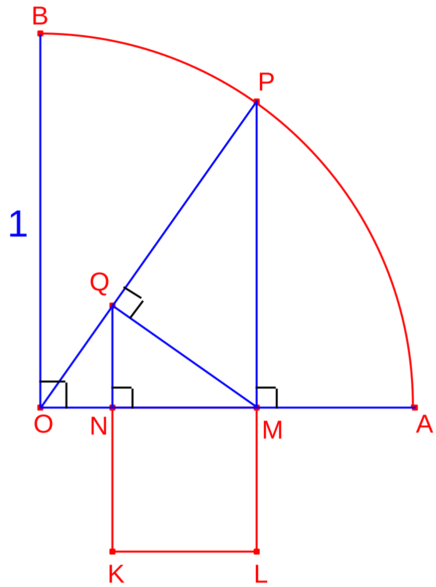
$S_{KLMN} = \frac{(c+d)\sqrt{2}}{2}(c+d)\sqrt{2} = (c+d)^2 = \frac{4}{9}$



3259.- En un quadrant de radi 1 s'ha construït un quadrat ombrejat (veure figura).
Determineu l'àrea màxima del quadrat



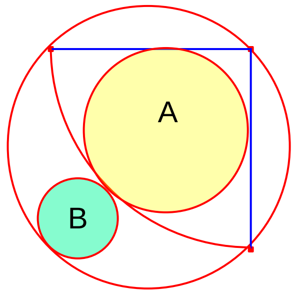
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = 1$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $c = \overline{KL}$



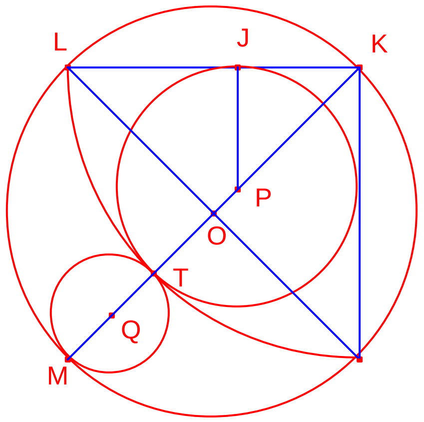
Siga $\alpha = \angle POA = \angle NQM = \angle QMP$
$\overline{PM} = \sin\alpha$
$\overline{QM} = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$c = \overline{MN} = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

L'àrea del quadrat $KLMN$ és:
$S(\alpha) = c^2 = \sin^4\alpha \cdot \cos^2\alpha,\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$S'(\alpha) = 2 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (2 \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$
$S'(\alpha) = 0$
$2 \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$
$3 \cdot \cos^2\alpha = 1$
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
$S''\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0$
L'àrea màxima és:
$$S_{màx} = S\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

3260.- En una circumferència s'ha dibuixat un quadrant.
El quadrant conté una circumferència inscrita.
Entre el quadrat i la circumferència exterior s'ha dibuixat una circumferència tangent.
Calculeu la proporció de les àrees $A : B$



Solució:



Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OL} = R$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KT} = \overline{KL} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $L\overset{\Delta}{O}K$:
$r^2 = 2R^2$
$r = R\sqrt{2}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PJ} = \overline{PT} = s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $P\overset{\Delta}{J}K$:
$\overline{PK}^2 = 2s^2$
$r = s + s\sqrt{2}$
Aleshores,
$s = (\sqrt{2} - 1)r = (2 - \sqrt{2})R$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = \overline{QM} = t$
$2t = 2R - r = (2 - \sqrt{2})R$
$$t = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R$$
La proporció entre les àrees dels cercles és:
$$\frac{A}{B} = \frac{\pi s^2}{\pi t^2} = 4$$