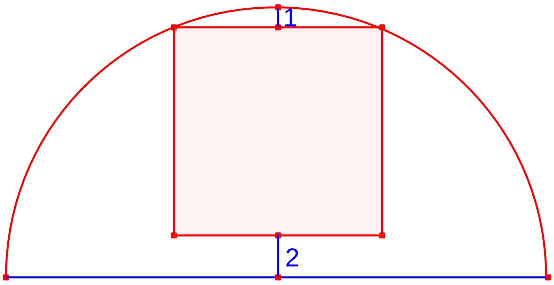
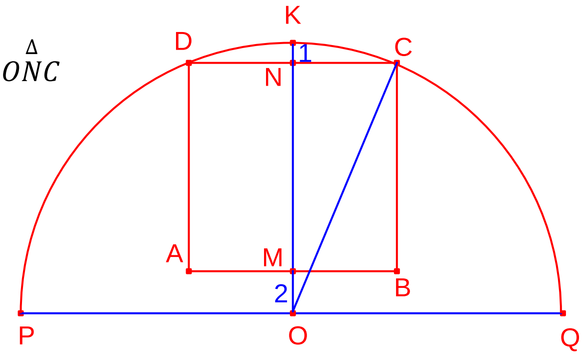
3261.- Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



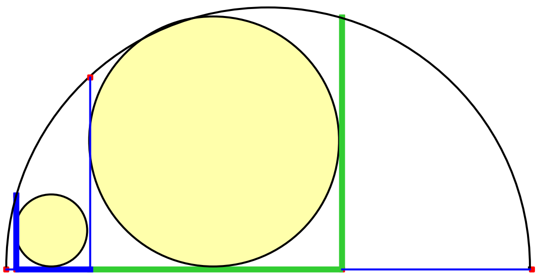
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OC} = c + 3$
$\overline{CN} = \frac{1}{2}c, \overline{ON} = c + 2$



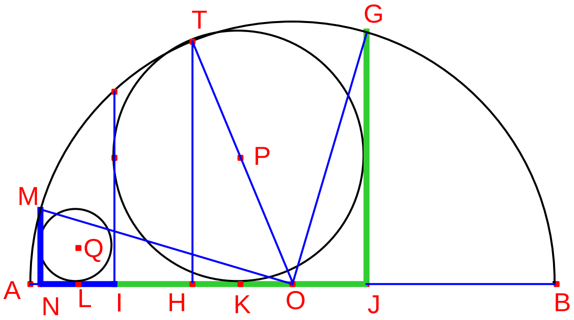
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONC}$
$(c + 3)^2 = (c + 2)^2 + \frac{1}{4}c^2$
Simplificant:
$\frac{1}{4}c^2 - 2c - 5 = 0$
Resolent l'equació:
$c = 10$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = 100$

3262.- En la figura els segments blaus i verds són iguals

Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos cercles i l'àrea del semicercle.



Solució:



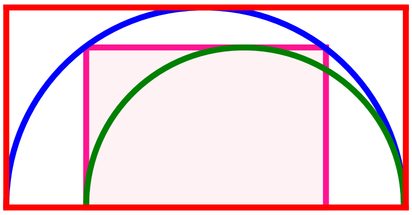
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = \overline{OG} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PK} = r$
$\overline{JG} = 2r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QL} = s$
$\overline{MN} = 2s$
Siga $\overline{OJ} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNO}$:
$R^2 = 4s^2 + (2s + 2r - x)^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OJG}$:
$R^2 = x^2 + 4r^2$ (2)

Igualant les expressions (1) (2):
$2s^2 + 2sr - sr + rx = 0$
Simplificant:
$x = 2s$
Substituint en l'expressió (2):
$R^2 = 4s^2 + 4r^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{r^2 + s^2}{\frac{1}{2}R^2} = \frac{1}{2}$$

3263.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea del rectangle ombrejat i l'àrea del rectangle exterior.



Solució:

Siga la semicircumferència de centre O di diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Siga el rectangle exterior $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2R, \overline{AD} = R$

Siga el rectangle interior $KLMN$, $\overline{KO} = \overline{OL} = a$

Siga $\overline{LB} = b$

$2a + 2b = 2R$

Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PB} = \overline{PT} = \frac{2a+b}{2} = \frac{R+a}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{R+a}{2}\right)^2$$

Simplificant:

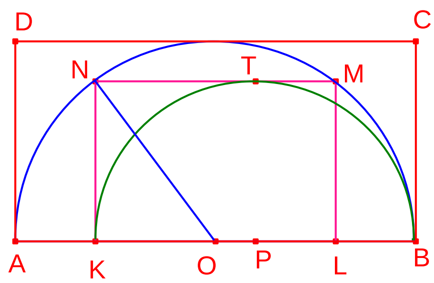
$$5a^2 + 2Ra - 3R^2 = 0$$

Resolent l'equació:

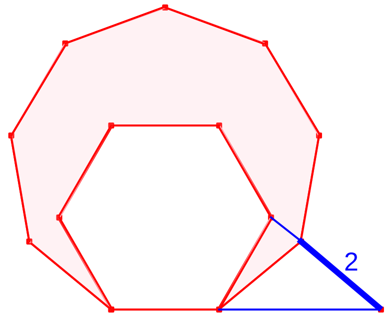
$$a = \frac{3}{5}R$$

La proporció d'àrees és:

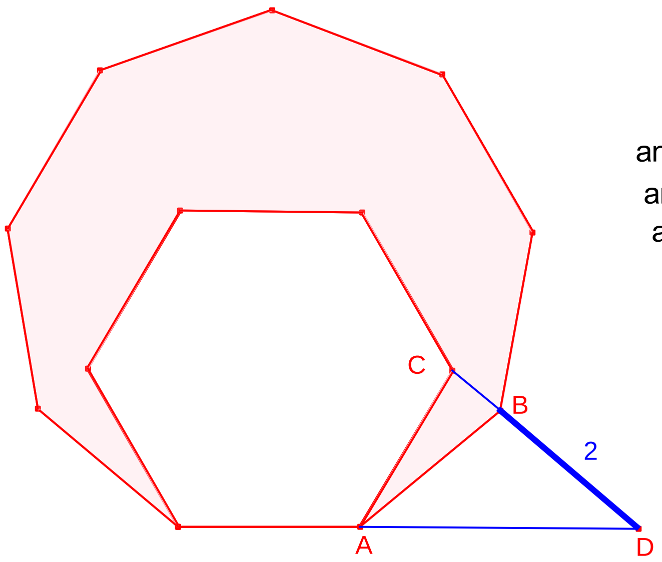
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{2a \cdot \frac{R+a}{2}}{2R \cdot R} = \frac{aR + a^2}{2R^2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{9}{25}}{2} = \frac{12}{25}$$



3264.- La figura està formada per un enneàgon i un hexàgon regulars.
Calculeu el perímetre de la regió ombrejada.



Solució:



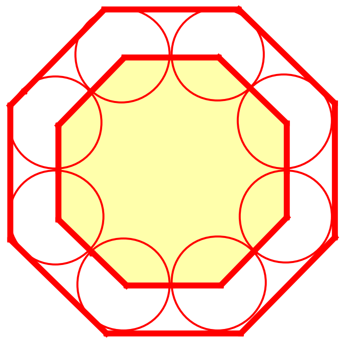
angle CAD=60º
angle BAC=40º

angle ACB=angleABC=80º
angle ABD=100º
angle ADB=40º

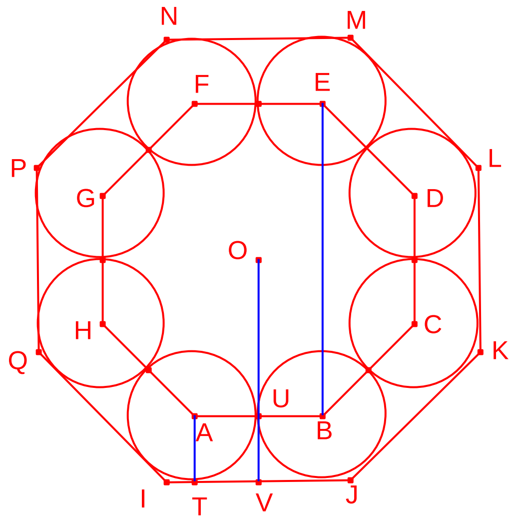
AB=BD=2

Perimetre=13·2=26

3265.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos octògons regulars.



Solució:
Siga r el radi de les vuit circumferències iguals.
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de centre O i costat $\overline{AB} = 2r$
Siga l'octògon regular $IJKLMNPQ$ de centre O



$\overline{BE} = (1+\sqrt{2})\overline{AB} = 2(1+\sqrt{2})r$

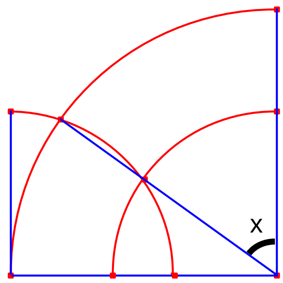
$\overline{OU} = \frac{1}{2}\overline{BE} = (1+\sqrt{2})r$

$\overline{OV} = \overline{OU} + r = (2+\sqrt{2})r$

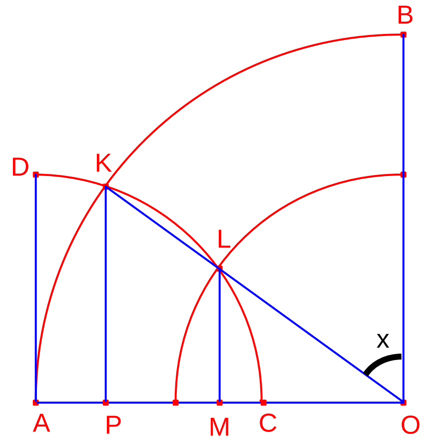
Els dos octògons regulars són semblants i la proporció d'àrees és igual al quadrat de la raó de semblança.

$$\frac{S_{ABCDEFGH}}{S_{IJKLMNPQ}} = \left(\frac{\overline{OU}}{\overline{OV}}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

3266.- La figura conté 3 quadrants dos d'ells iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



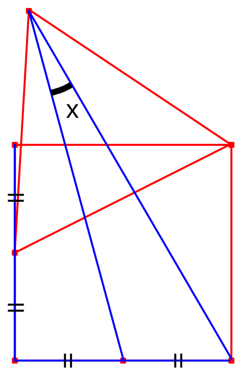
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrant de centre A i radi $\overline{AC} = r$
Siga K la intersecció dels dos quadrants anterior.
Siga P la projecció de K sobre $\overline{OA}$
Siga L la intersecció dels dos quadrants iguals.
La projecció M del punt L sobre $\overline{OA}$ és el punt mig de $\overline{OA}$
Siga $a = \overline{AP}$



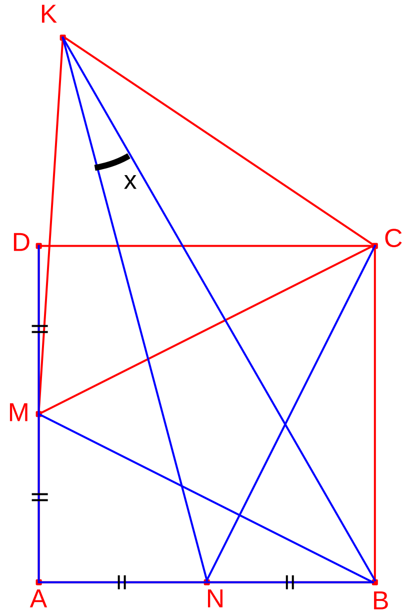
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{APK}, \overset{\Delta}{KPO}$:
$r^2 - a^2 = R^2 - (R-a)^2$
Simplificant:
$r^2 = 2Ra$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LMO}, \overset{\Delta}{KPO}$.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\frac{r}{2}}{\frac{2R^2 - r^2}{2R}} = \frac{r}{R}$$
Simplificant:
$r^3 - 2R^2r + R^3 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}R$$
$$\cos x = \frac{\overline{OM}}{\overline{OL}} = \frac{R}{2r} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
$x = 54°$

3267.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen M,N els punts migs dels costats $\overline{AD},\overline{AB}$, respectivament.
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{MCK}$.
Siga $x=\angle NKB$
Siga $\alpha=\angle DCM$
$\alpha=\angle NCB$



Siga $\beta=\angle NBC$
$\angle NCM=90°-2\alpha$

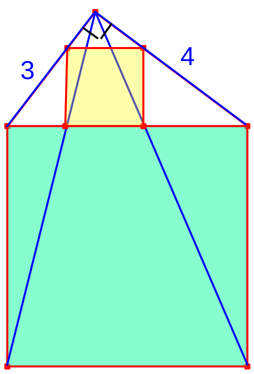
$\angle KCN=60°+90°-2\alpha=150°-2\alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{NBC}$ és isòsceles.
$2\beta+150°-2\alpha=180°$
Simplificant:
$\beta=15°+\alpha$

Siga $\gamma=\angle NBC$
$\angle CMB=2\alpha$
$\angle KMB=60°+2\alpha$
El triangle $\overset{\Delta}{KMB}$ és isòsceles.
$2\gamma+60°+2\alpha=180°$
Simplificant:
$\gamma=60°-\alpha$

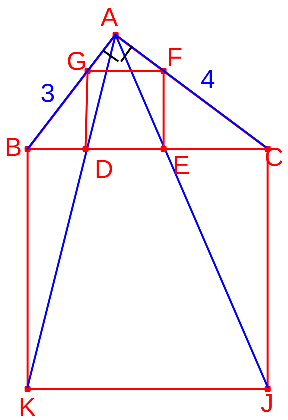
$\beta+\gamma=60°+x$
$15°+\alpha+60°-\alpha=60°+x$
Aleshores, $x=15°$

3268.- En la figura determineu la proporció entre les àrees dels dos quadrats ombrejats.



Solució:

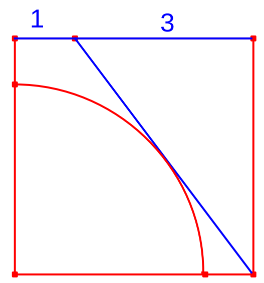
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, b = 4, c = 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$a = 5$
Siga el quadrats $DEFG$ de costat $\overline{DE} = x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, D\overset{\Delta}{B}G$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$$\overline{BD} = \frac{3}{4}x$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, E\overset{\Delta}{F}C$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:
$$\overline{CE} = \frac{4}{3}x$$

$$5 = a = \left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3}\right)x$$
$$\frac{x}{5} = \frac{12}{37}$$
La proporció entre les àrees de dos quadrats és igual al quadrats de la proporció dels costats:
$$\frac{S_{DEFG}}{S_{BCJK}} = \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{37}\right)^2 = \frac{144}{1369} \approx 0.1052$$

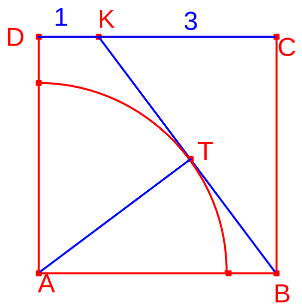
3269.- En un quadrat un segment des del vèrtex inferior dret divideix el costat superior en dos segments de longituds 1, 3. Un quadrant de centre el vèrtex inferior esquerre és tangents al segment.
Calculeu el radi del quadrant.



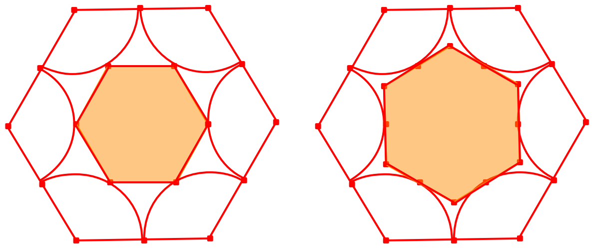
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{Ab} = 4$
Siga el quadrat de centre A i radi $\overline{AT} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCK}$:
$\overline{BK} = 5$

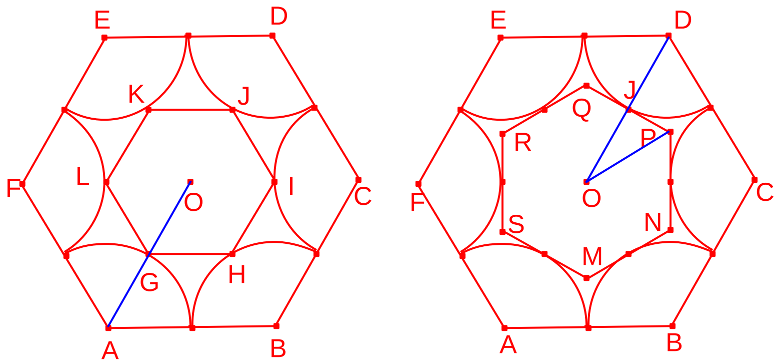
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCK}, \overset{\Delta}{ATB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{r}{4} = \frac{4}{5}$
$r = \frac{16}{5}$



3270.- Calculeu en tots dos casos, la proporció entre l'àrea de l'hexàgon regular ombrejat i l'àrea de l'hexàgon regular exterior.



Solució:



Siguen els hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siga l'hexàgon regular $GHIJKL$ de centre O.

$$\overline{GH} = \overline{OG} = \overline{OA} - \overline{AG} = \frac{1}{2}c$$

La proporció entre les àrees és iguals a la proporció entre els quadrats de la raó de semblança.

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Siga l'hexàgon regular $MNPQRS$ de centre O.

$$\overline{OJ} = \overline{OD} - \overline{DJ} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{OJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ}$$

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$

La proporció entre les àrees és iguals a la proporció entre els quadrats de la raó de semblança.

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{MNPQRS}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$