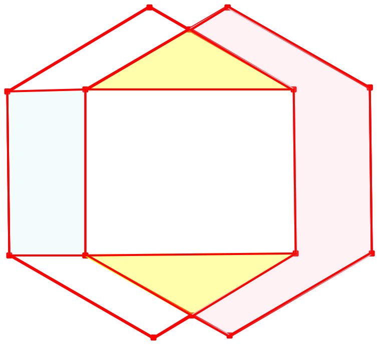
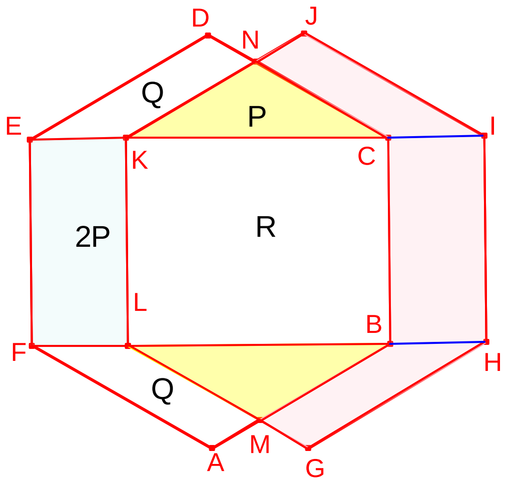
3271.- La figura està formada per dos hexàgons regulars iguals solapats.
L'àrea del rectangle blau és igual a la suma de les àrees dels triangles grocs.
Calculeu la proporció entre l'àrea del polígon rosa i l'àrea total de la figura.



Solució:
Sigen els hexàgons regulars $ABCDEF, GHIJKL$.
Siga $S = S_{ABCDEF}$
Siga $P = S_{CNK}$
Siga $Q = S_{EKND}$
Siga $R = S_{LBCK}$

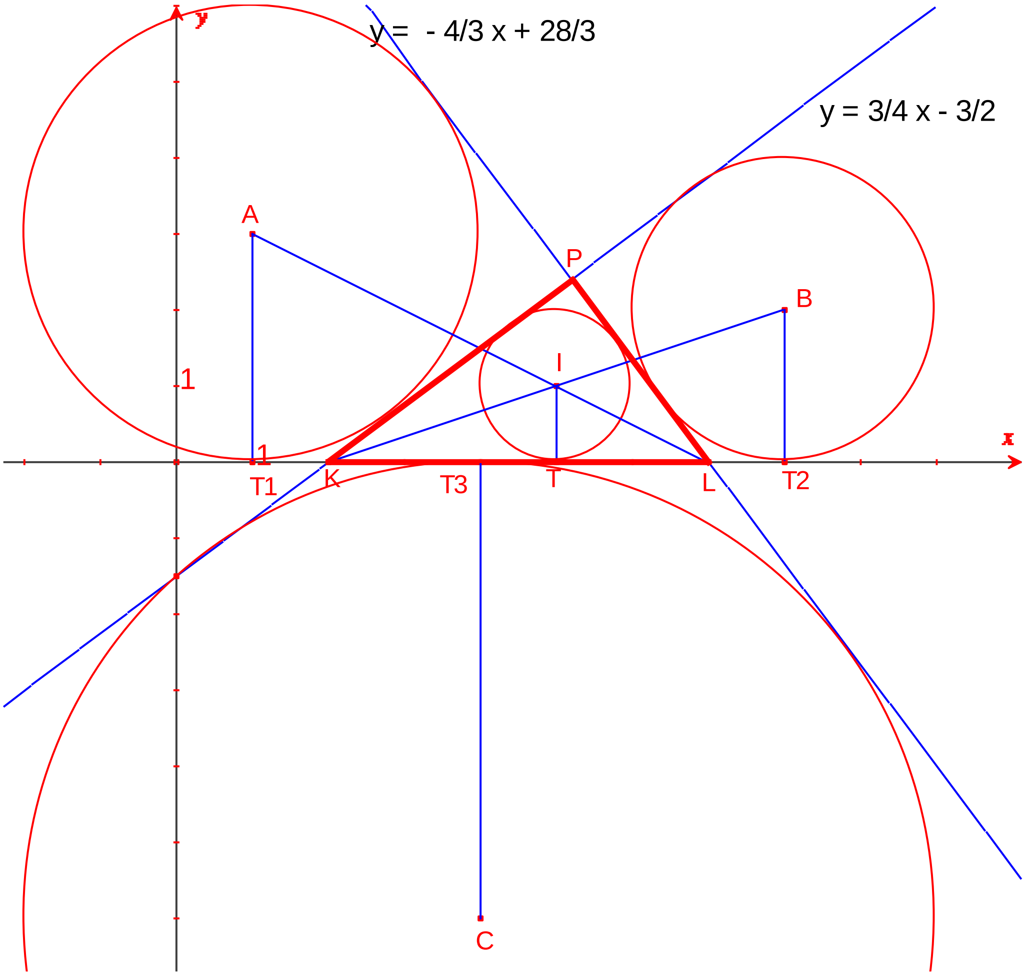


$$S_{FLKE} = S_{BHIC} = 2P$$
$$S_{FBCE} = \frac{2}{3}S = 2P + R$$
$$S_{ECD} = \frac{1}{6}S = P + Q$$

L'àrea rosa és:
$$S_{rosa} = 2P + 2Q = 2 \cdot \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$$
L'àrea total és:
$$S_{total} = S_{ABCDEF} + S_{rosa} = S + \frac{1}{3}S = \frac{4}{3}S$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{rosa}}{S_{total}} = \frac{\frac{1}{3}S}{\frac{4}{3}S} = \frac{1}{4}$$

3272.- Calculeu el radi de la circumferència tangent a l'eix d'abscisses i a les funcions $f(x) = \frac{3x-6}{4}, g(x) = \frac{28-4x}{3}$

Solució:



Les funcions són rectes.

$3x - 4y - 6 = 0, 4x + 3y - 28 = 0$

Les dues rectes són perpendiculars.

Resolem el sistema per calcular la intersecció de les dues rectes:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 4x + 3y = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{26}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$$

El punt intersecció té coordenades:

$P\left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}\right)$

Calculem la intersecció de la funció $f(x) = \frac{3x-6}{4}$ i l'eix d'abscisses:

$K(2,0)$

Calculem la intersecció de la funció$(x) = \frac{28-4x}{3}$ i l'eix d'abscisses:

$L(7,0)$

Hi ha quatre circumferències circumferències que ho compleixen la inscrita al triangle $\overset{\Delta}{KLP}$ i les tres exinscrites.

$\overline{KL} = p = 5, \overline{PK} = l = 4, \overline{PL} = k = 3$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKL}$ és:

$r = \overline{IT} = \frac{k + l - p}{2} = 1$

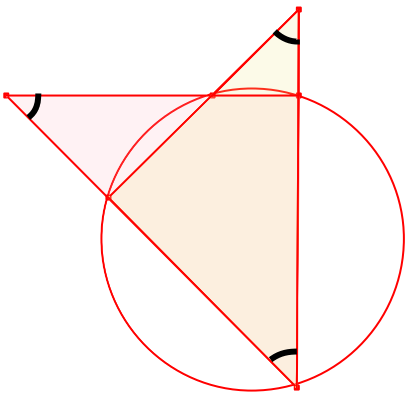
Els radis de les circumferències exinscrites són:

$r_l = \overline{AT_1} = \frac{k + l + p}{k - l + p} \cdot r = \frac{12}{4} = 3$

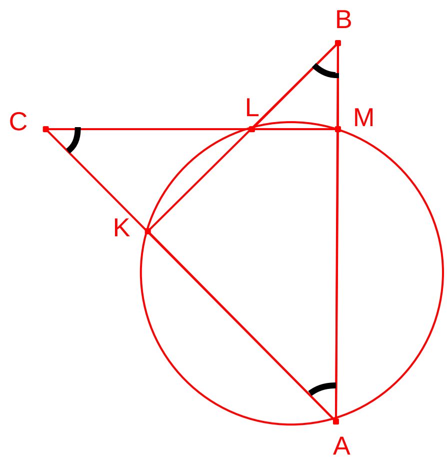
$r_k = \overline{BT_2} = \frac{k + l + p}{-k + l + p} \cdot r = \frac{12}{6} = 2$

$r_p = \overline{CT_3} = \frac{k + l + p}{k + l - p} \cdot r = \frac{12}{2} = 6$

3273.- En la figura, la circumferència té radi 2 i els angles marcats són iguals.
Calculeu l'àrea total ombrejada.

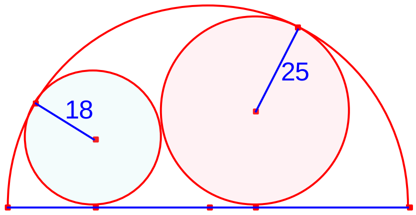


Solució:
Siguen $\alpha = \angle CAB = \angle ABK = \angle ACK$
Els triangles $\overset{\Delta}{AKB}, \overset{\Delta}{AMC}$ són isòsceles.
$\angle BKA = 180° - 2\alpha, \angle AMC = 180° - 2\alpha$
El quadrilàter AKLM està inscrit en una circumferència.
Aleshores, $\angle BKA = 180° - \angle AMC$
$180° - 2\alpha = 2\alpha$
Resolent l'equació:
$\alpha = 45°$
Aleshores,
$\angle AKB = \angle AMC = 90°$
$\overline{AL} = 4$, diàmetre de la circumferència.
Siga $\overline{KL} = a, \overline{LM} = b$
$\overline{CK} = a, \overline{CL} = a\sqrt{2}, \overline{BM} = b, \overline{BL} = b\sqrt{2}$
$\overline{AM} = \overline{CM} = a\sqrt{2} + b$

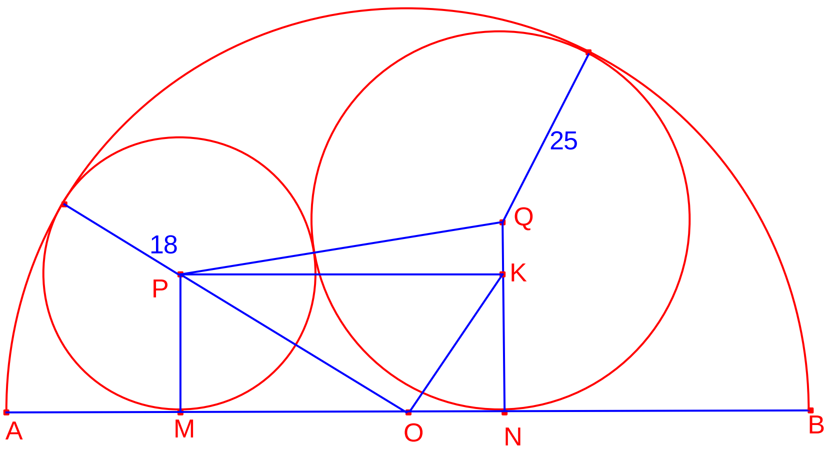


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AML}$:
$(a\sqrt{2} + b)^2 + b^2 = 4^2$
Simplificant:
$a^2 + b^2 + ab\sqrt{2} = 8$
L'àrea de la zona ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{AML} + S_{LMB} = \frac{1}{2}(a\sqrt{2} + b)^2 + \frac{1}{2}b^2 = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2} = 8$

3274.- En la figura, dues circumferències tangents de radi 18, 25 són tangents a una semicircumferència.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos cercles i l'àrea del semicercle.



Solució:

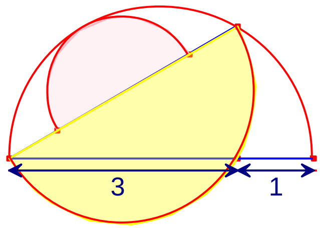


Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = 18$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QN} = 25$
Siga la projecció de P sobre $\overline{QN}$

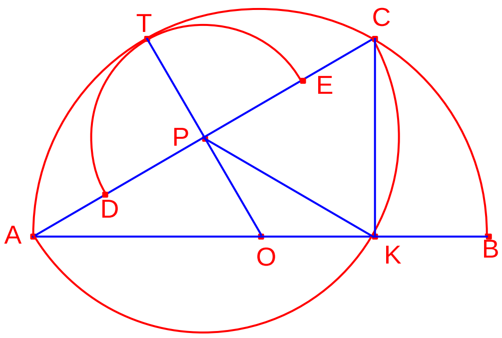
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $P\overset{\Delta}{K}Q$:
$\overline{MN} = \overline{PK} = 30\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $O\overset{\Delta}{M}P, O\overset{\Delta}{N}K$:
$\sqrt{(R-18)^2 - 18^2} + \sqrt{(R-25)^2 - 25^2} = 30\sqrt{2}$
Resolent l'equació:
$R = \dfrac{900}{17}$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{\pi 18^2 + \pi 25^2}{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{900}{17}\right)^2} = \frac{274261}{405000} \approx 0.6772$$

3275.- En la figura, determineu la proporció entre la suma de les àrees dels semicercles ombrejats i l’àrea del semicercle no ombrejat.

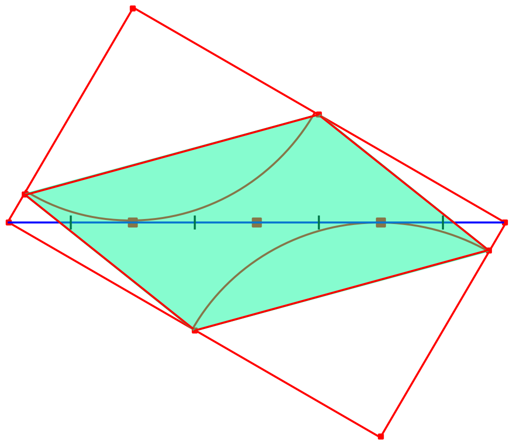


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 4$
Siga la semicircumferència de centre P i diàmetre $\overline{AC} = 2r$
$\angle AKC = 90°, \overline{AK} = 3$
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{DE} = 2s$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKC}, \overset{\Delta}{APO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

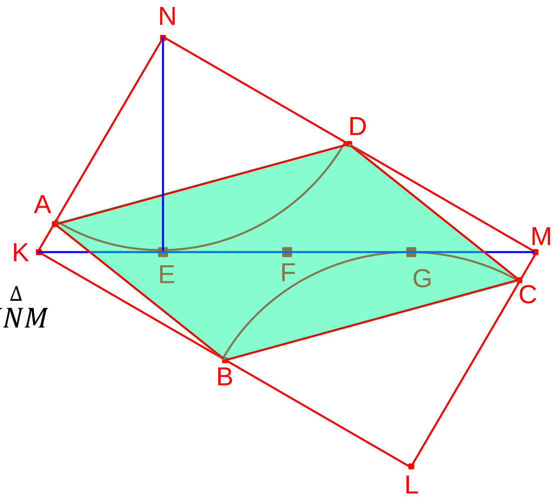


$$\frac{r}{2} = \frac{3}{2r}$$
$$r^2 = 3$$
$$\overline{OP} = \sqrt{2^2 - r^2} = 1$$
$$s = \overline{PE} = \overline{PT} = 2 - \overline{OP} = 1$$
La proporció d’àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}s^2}{\frac{1}{2}2^2} = \frac{3+1}{4} = 1$$

3276.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle exterior.

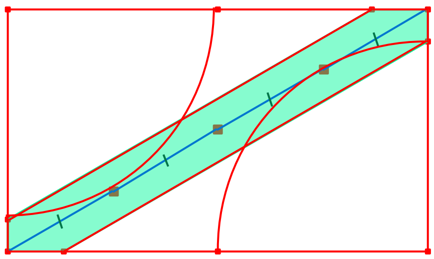


Solució:
Siga el paral·lelogram $ABCD$.
Siga el rectangle $KLMN$.
Siga $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GM} = 1$
$\overline{NE} = r$ és perpendicular a $\overline{KM}$

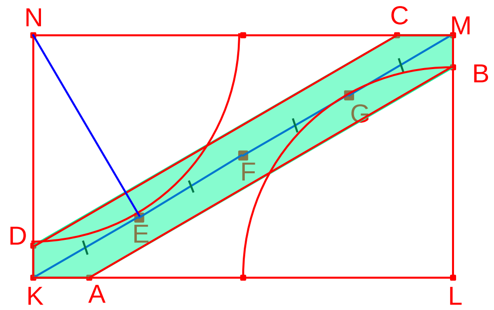


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KNM}, \overset{\Delta}{KEN}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KN} = 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{KNM}$
$\overline{NM} = 2\sqrt{3}$
$\overline{NE} = \frac{1}{2}\overline{NM} = \sqrt{3}$
$\overline{AK} = 2 - \sqrt{3}, \overline{KB} = \sqrt{3}$
L'àrea del rectangles $KLMN$ és:
$S_{KLMN} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
L'àrea del paral·lelogram $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = S_{KLMN} - 2 \cdot S_{AND} - 2 \cdot S_{AKB} = 4\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

3277.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle exterior.



Solució:



Siga l'hexàgon $KABMCD$.

Siga el rectangle $KLMN$.

Siga $\overline{KE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GM} = 1$

$\overline{NE} = r$ és perpendicular a $\overline{KM}$

Els triangles rectangles $K\overset{\Delta}{N}M, K\overset{\Delta}{E}N$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KN} = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $K\overset{\Delta}{N}M$

$\overline{NM} = 2\sqrt{3}$

$\overline{NE} = \frac{1}{2}\overline{NM} = \sqrt{3}$

$\overline{NC} = 3$

L'àrea del rectangles $KLMN$ és:

$S_{KLMN} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

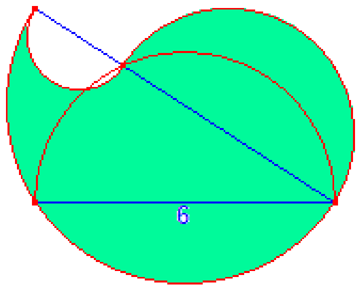
L'àrea l'hexàgon $KABMCD$.és:

$S_{KABMCD} = S_{KLMN} - 2 \cdot S_{CND} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

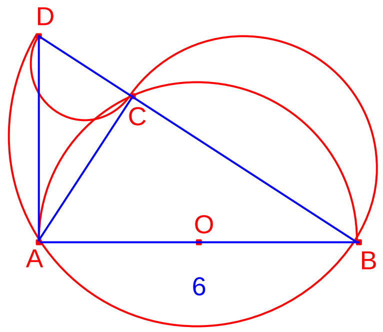
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{KABMCD}}{S_{KLMN}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

3278.- Un dels quatre semicercles té diàmetre 6.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 6$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC} = a$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD} = b$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{BD} = a + b$

$\angle ACB = 90°, \angle DAB = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB}$:
$\overline{AC}^2 = 36 - a^2$.

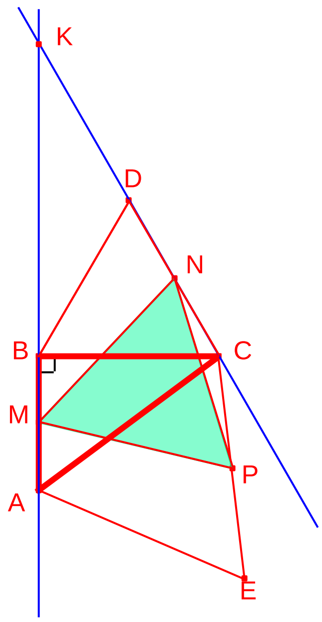
Aplicant el teorema de l'altura rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = ab$
$36 - a^2 = ab$
$a^2 + ab = 36$
L'àrea ombrejada és igual a la suma de les àrees dels semicercles de diàmetre $\overline{BD} = a + b, \overline{BC} = a$ menys l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{CD} = b$:

$$S_{ombrejada} = \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4}(2a^2 + 2ab) = 9\pi$$

3279.- Sobre l'exterior dels costats $\overline{BC}, \overline{CA}$ del triangle rectangle $\overset{,\Delta}{ABC}, B = 90^\circ$ s'han dibuixat els triangles equilàters $\overset{\Delta}{BCD}, \overset{\Delta}{CAE}$.
Demostreu que els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{CE}$ formen un triangle equilàter.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{,\Delta}{ABC}, B = 90^\circ$ de costats $\overline{BC} = 2a, \overline{AB} = 2c, \overline{AC} = 2b$
$b^2 = a^2 + c^2$
Siguen M, N, P els punts migs dels segments $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{CE}$, respectivament
Siga K la intersecció de les rectes AB, CD.
$\angle BKC = 30^\circ, \overline{KN} = 3a, \overline{BK} = 2\sqrt{3}a, \overline{KM} = 2\sqrt{3}a + c$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$$\overline{MN}^2 = 9a^2 + \left(2\sqrt{3}a + c\right)^2 - 2 \cdot 3a \cdot \left(2\sqrt{3}a + c\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Simplificant:
$$\overline{MN}^2 = 3a^2 + c^2 + \sqrt{3}ac$$

Siga $\angle ACB = \gamma$
$$\sin\gamma = \frac{c}{b}, \cos\gamma = \frac{a}{b}$$
$$\angle NCP = 120^\circ + \gamma$$

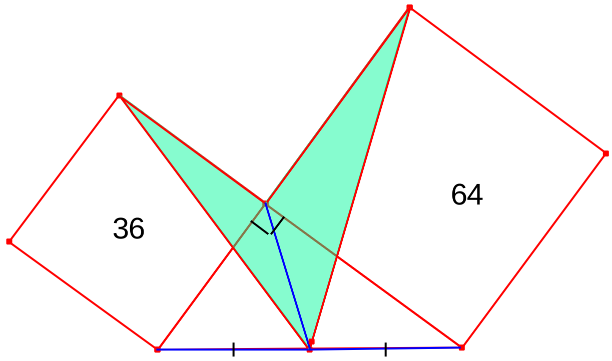
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{NCP}$
$$\overline{NP}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(120^\circ + \gamma)$$
$$\overline{NP}^2 = a^2 + a^2 + c^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c}{b}\right)$$

Simplificant:
$$\overline{NP}^2 = 3a^2 + c^2 + \sqrt{3}ac$$
$$\angle MAP = 120^\circ - \gamma$$

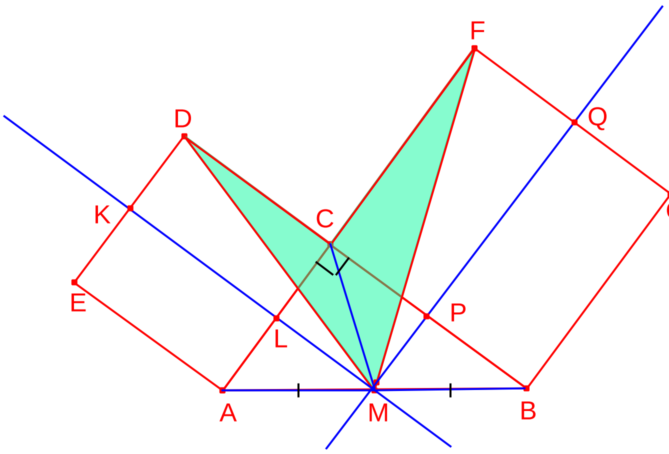
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MAP}$
$$\overline{AP} = b\sqrt{3}$$
$$\overline{MP}^2 = c^2 + 3b^2 - 2c\sqrt{3}b \cdot \cos(120^\circ - \gamma)$$
$$\overline{MP}^2 = c + 3a^2 + 3c^2 - 2c\sqrt{3}b \cdot \left(-\frac{1}{2}\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{c}{b}\right)$$

$$\overline{MP}^2 = 3a^2 + c^2 + \sqrt{3}ac$$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és equilàter.

3280.- Sobre l’exterior de dos catets d’un triangle rectangle s’han dibuixat dos quadrats d’àrees 36 i 64.
Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
La paral·lela mitjana KL del quadrat $ACDE$ passa pel punt M
La paral·lela mitjana PQ del quadrat $BCFG$ passa per M

$$S_{DCM} = \frac{1}{2} S_{DCLK} = 9$$
$$S_{FCM} = \frac{1}{2} S_{CFQP} = 16$$
$$S_{CFCD} = S_{DCM} + S_{FCM} = 9 + 16 = 25$$