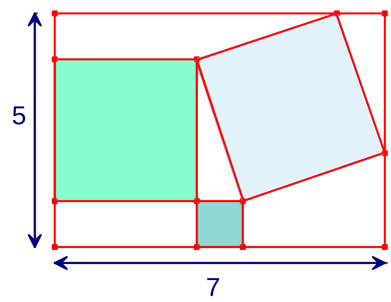
3281.- Calculeu la suma de les àrees dels tres quadrats ombrejats.



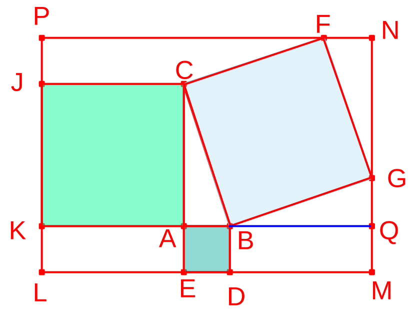

Solució:

Siga el rectangle $LMNP$ de costats $\overline{LM} = 7, \overline{LP} = 5$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = \overline{BC}, b = \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$a^2 = b^2 + c^2$




Siguen els quadrats $ABDE, BCFG, ACJK$.

Siga $Q$ la projecció de $B$ sobre $\overline{MN}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{QGB}, \overset{\Delta}{NFG}$ són iguals.

$\overline{LM} = 2b + c = 7$

$\overline{MN} = b + 2c = 5$

Considerem el sistema:

$\begin{cases} 2b + c = 7 \\ b + 2c = 5 \end{cases}$

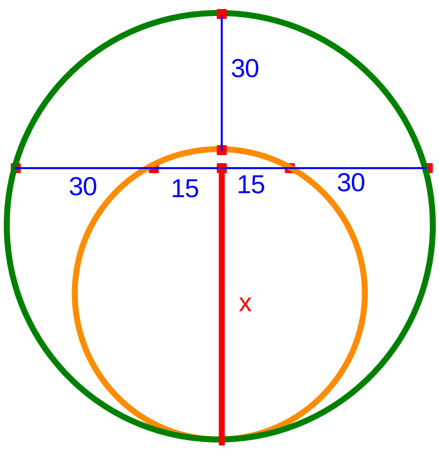
Resolent el sistema:

$\begin{cases} b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

La suma de les àrees dels quadrats ombrejats és:

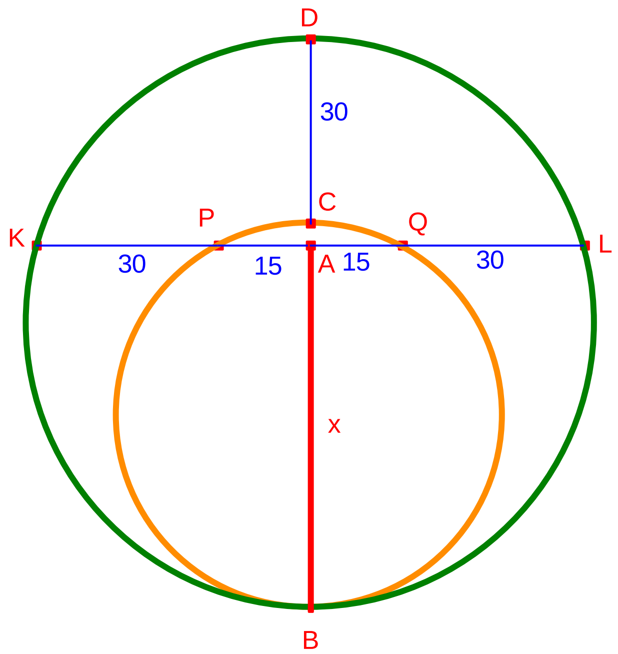
$S = a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) = 2(9 + 1) = 20$

3282.- Calculeu la mesura del segment $x$

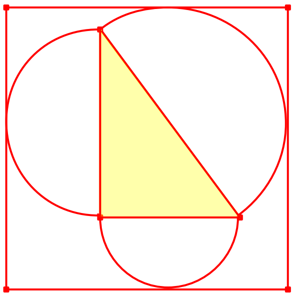



Solució:
Siga $\overline{AB} = x$
Siga $\overline{AC} = a$
Calculant la potència del punt $P$ respecte de la circumferència gran:
$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AK} \cdot \overline{AL}$
$(30 + a)x = 45^2$

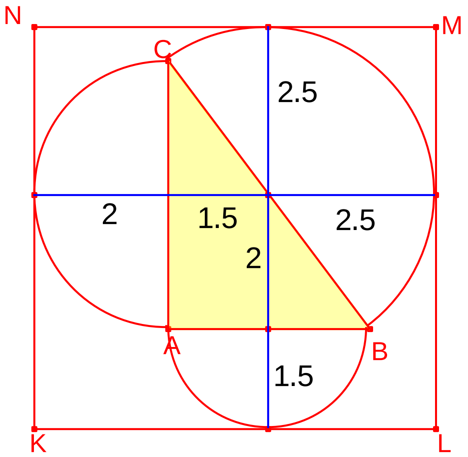
Calculant la potència del punt $P$ respecte de la circumferència menuda:
$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$
$ax = 15^2$
Resolent el sistema:
$x = 60$



3283.- Els costats del triangle ombrejat estan en proporció 3:4:5.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea total de la figura.



Solució:




AB=3, AC=4, BC=5

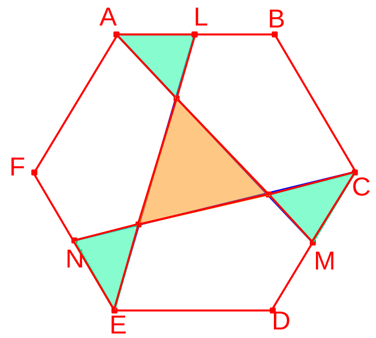
KL=6, LM=6

[ABC]=6

[KLMN]=$6^2$=36

[ABC]/[KLMN]=1/6

3284.- Donats els punts migs $L, M, N$ dels costats de l'hexàgon regular $ABCDEF$, determineu la proporció entre la suma de les àrees del triangles verds i l'àrea del triangle taronja.




Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$

$\overline{AE} = \sqrt{3}$

$\overline{RL} = \overline{PN} = \overline{QM}, \overline{RA} = \overline{PE} = \overline{QC}$

El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter.

$$\overline{LE} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Siga $\angle ALR = \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ALR}$:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin 60°} = \frac{\overline{AR}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{LR}}{\sin(60° + \alpha)}$$

$$\overline{AR} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \overline{LR} = \frac{3}{2\sqrt{13}}$$

L'àrea verda és:

$$S_{verda} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{52}$$

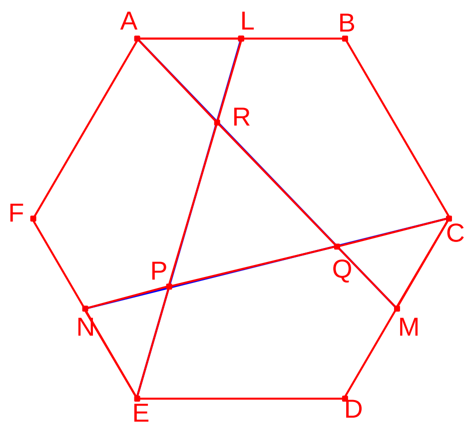
$$\overline{PR} = \overline{LE} - (\overline{AR} + \overline{LR}) = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{52}$$

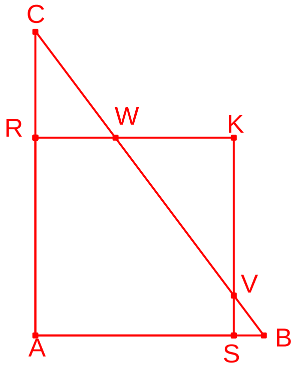
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{PQR}} = 1$$



3285.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, a = 5, b = 4, c = 3$.
Determineu el valor $m$ tal que el quadrat de costat $m$ amb vèrtex $A, R$ sobre el costat $\overline{AC}$, $S$ sobre el costat $\overline{AB}$ talle el costat $\overline{BC}$ en un segment $\overline{VW} = m$

Solució:
Siga el quadrat $ASKR$ de costat $\overline{AR} = m$




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KWV}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{WK} = \frac{3}{5}m$$

$$\overline{RW} = m - \overline{WK} = \frac{2}{5}m$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{RWC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

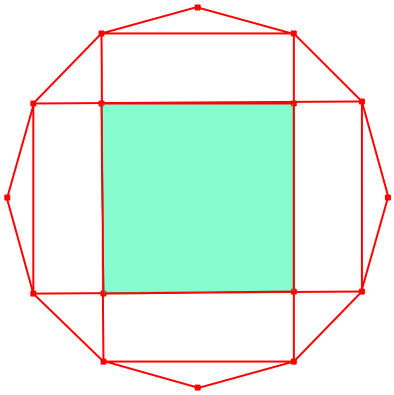
$$\overline{CR} = \frac{8}{15}m$$

$$\overline{AC} = 4 = m + \frac{8}{15}m$$

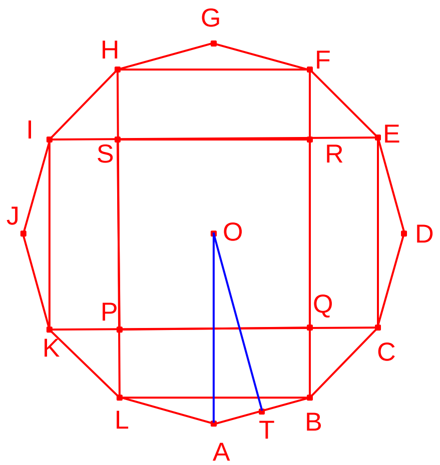
Resolent l'equació:

$$m = \frac{60}{23}$$

3286.- Donat el dodecàedre regular, determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del dodecàedre.



Solució:




AB=1

angle LAB=150º

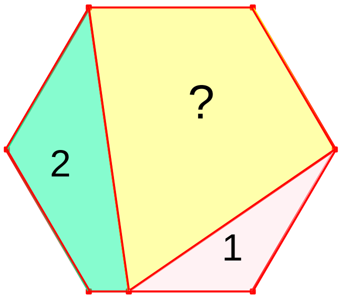
$PQ^2=3+\mathrm{sqrt}(3)$

OT=(2+sqrt(3))/2

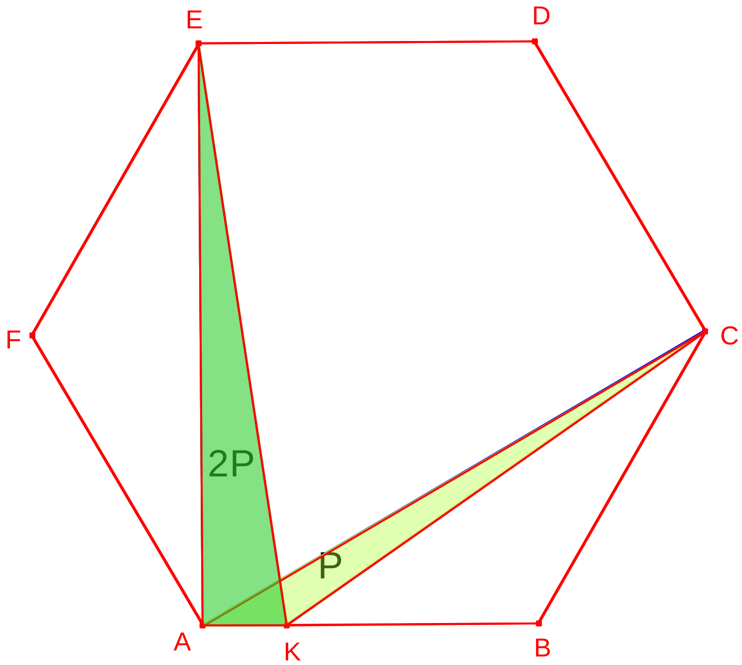
[ABCDEFGHIJKL]=3(2+sqrt(3))

[PQRT]/[ABCDEFGHIJKL]=3(2+sqrt(3))=1/3

3287.- L'hexàgon regular de la figura s'ha dividit en tres parts: un quadrilàter d'àrea 2, un triangle d'àrea 1. Calculeu l'àrea del quadrilàter desconegut.




Solució:




Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ d'àrea $S$.

$S_{AEF} = S_{ABC} = \frac{1}{6}S$

Siga $S_{AKC} = P$

$S_{AKE} = 2 \cdot S_{AKC} = 2P$

$\frac{1}{6}S = S_{AKEF} - S_{AKE} = 2 - 2P$

$\frac{1}{6}S = S_{KBC} - S_{AKC} = 1 + P$

Aleshores:

$2 - 2P = 1 + P$

Aleshores,

$P = \frac{1}{3}$

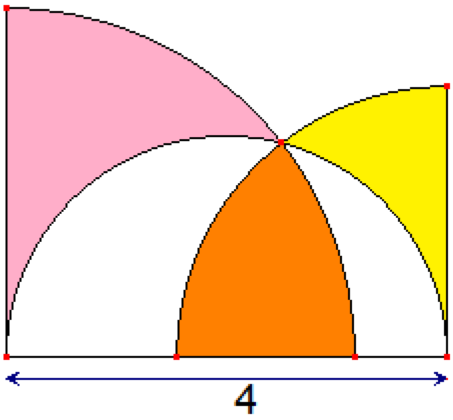
$\frac{1}{6}S = 2 - 2P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$S = 8$

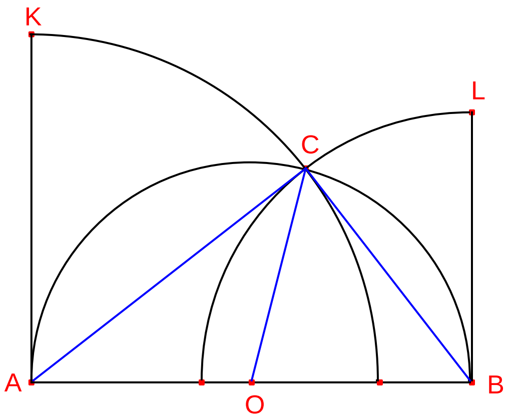
L'àrea del quadrilàter $KCDE$ és:

$S_{KCDE} = A_{ABCDEF} - S_{KBC} - S_{AKEF} = 8 - 1 - 2 = 5$

3288.- Sobre una semicircumferència de diàmetre 4 s'han dibuixat dos quadrants. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada




Solució:




Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 4$
Siga el quadrant de centre $A$ i radi $\overline{AK} = \overline{AC} = R$
Siga el quadrant de centre $B$ i radi $\overline{BL} = \overline{BC} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$R^2 + r^2 = 16$

Siga $\alpha = \angle CAB$
L'àrea rosa és:

$$S_{rosa} = \pi R^2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2\pi} - \pi 2^2 \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} + \frac{1}{2} 2^2 \sin 2\alpha$$

L'àrea groga és:

$$S_{groga} = \pi r^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \pi 2^2 \frac{2\alpha}{2\pi} + \frac{1}{2} 2^2 \sin 2\alpha$$

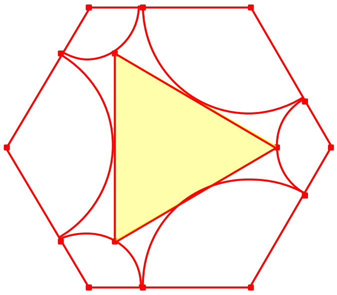
L'àrea taronja és:

$$S_{taronja} = \pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} 2^2 \sin 2\alpha + \pi r^2 \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} 2^2 \sin 2\alpha$$

La suma de les tres àrees és:

$$S = R^2 \frac{\pi}{4} + r^2 \frac{\pi}{4} - 2\pi = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

3289.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i l'hexàgon regular.

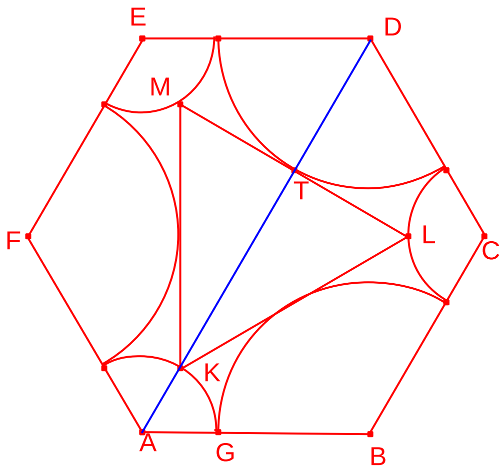


Solució:

Siga l'hexàgon regular $ABCDEFF$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = c$

Siga $\overline{AG} = \overline{AK} = r, \overline{BG} = \overline{DT} = s$




$$\overline{KT} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{AD} = 2(r+s) = r + s + \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$(r+s)^2 = \frac{3}{4}c^2$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(r+s)^2$$

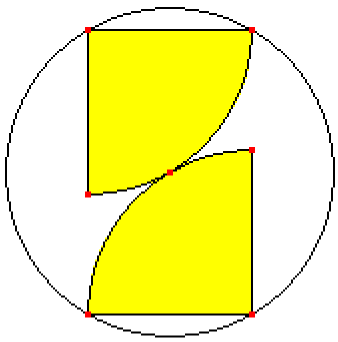
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

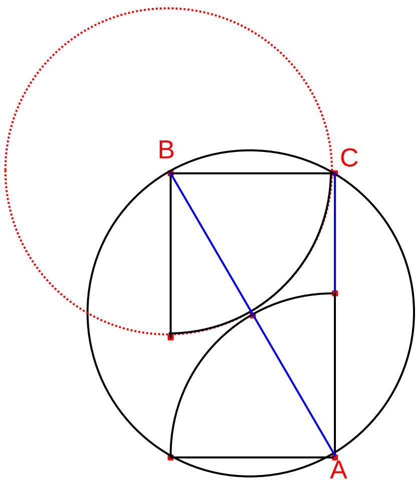
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(r+s)^2} = \frac{c^2}{6 \cdot \frac{3}{4}c^2} = \frac{2}{9}$$

3290.- Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos quadrants ombrejats i l'àrea del cercle.



Solució:




$\overline{AB} = 2\overline{BC}$

Aleshores, $\angle ABC = 60°$

La proporció d'àrees és

$\frac{S_{2q}}{S_{cercle}} = \frac{1}{2}$