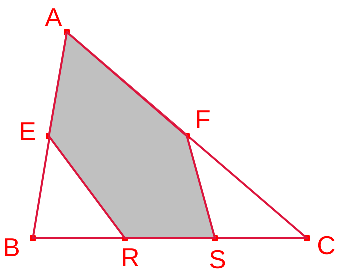
Problemes de Geometria per a l'ESO 33

321.- En la figura E és el punt mig de $\overline{AB}$, F el punt mig de $\overline{AC}$ i $\overline{BR} = \overline{RS} = \overline{SC}$.

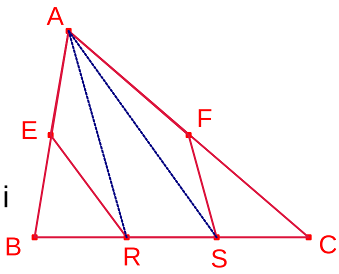
Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 252, determineu l'àrea del pentàgon AERSF.

Olimpíada matemàtica brasilera 2011 nivell 1.



Solució:

Siga l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRE}$ S.



Els triangles $\overset{\Delta}{BRE}$, $\overset{\Delta}{AER}$ tenen la mateixa base $\overline{AE} = \overline{BE}$ i la mateixa altura sobre aquests costats, aleshores tenen la mateixa àrea.

$S_{AER} = S_{BRE} = S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BRA}$, $\overset{\Delta}{RSA}$, $\overset{\Delta}{SCA}$ tenen la mateixa base $\overline{BR} = \overline{RS} = \overline{SC}$ i la mateixa altura sobre aquests costats, aleshores tenen la mateixa àrea.

$S_{BRA} = S_{RSA} = S_{SCA} = 2S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SCF}$, $\overset{\Delta}{AFS}$ tenen la mateixa base $\overline{CF} = \overline{AF}$ i la mateixa altura sobre aquests costats, aleshores tenen la mateixa àrea.

$S_{SCF} = S_{AFS}$.

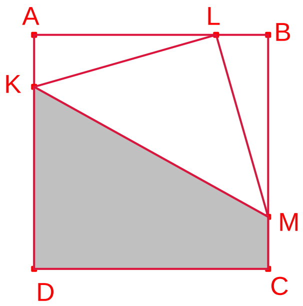
$S_{SCF} + S_{AFS} = 2S$.

Aleshores, $S_{AFS} = S$.

Per tant, $S_{ABC} = 6S = 252$. Resolent l'equació:

$S = 42$.

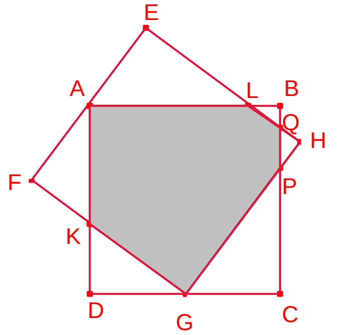
$S_{AERSF} = 4S = 168$.



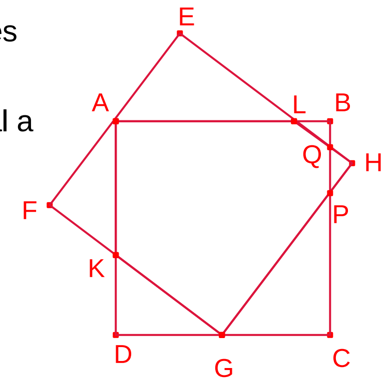
322.- En la figura ABCD és un quadrat de costat 4.
K pertany al costat $\overline{AD}$, L al costat $\overline{BA}$, M al costat $\overline{BC}$ i el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és rectangle i isòsceles $L = 90^{\circ}$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter CDKM.
Olimpíada matemàtica brasilera 2011 nivell 2.

Solució:
Per hipòtesi $\overline{LK} = \overline{LM}$.
Notem que $\angle ALK = \angle BML$.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ALK}$, $\overset{\Delta}{BML}$ són iguals, per tant, $\overline{AK} = \overline{BL}$, $\overline{AL} = \overline{BM}$.
Aleshores, $\overline{AK} = \overline{CM}$, $\overline{DK} = \overline{BM}$.
Per tant, els quadrilàters CDKM, ABMK són iguals.
Per tant l'àrea del quadrilàter CDKM és la meitat del quadrat ABCD.

323.- En la figura ABCD i EFGH són dos quadrats de costat 48.
Sabent que A és el punt mig del segment $\overline{EF}$ i G el punt mig de $\overline{DC}$, determineu l'àrea ombrejada, comuna dels dos quadrats.



Solució:
Siga $c = \overline{AB}$ costat dels quadrats.
Siga P la intersecció de $\overline{BC}$ i $\overline{GH}$.
Siga Q la intersecció de $\overline{BC}$ i $\overline{EH}$.
Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GDK}$, $\overset{\Delta}{FAK}$ són iguals ja que tenen els angles iguals i $\overline{AF} = \overline{DG} = \frac{c}{2}$.



Anàlogament, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GCP}$, $\overset{\Delta}{AEL}$ són iguals i triangles rectangles $\overset{\Delta}{LBQ}$, $\overset{\Delta}{PHQ}$ són iguals.
Per tant l'àrea ombrejada que és l'àrea de l'hexàgon AKGPQL és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{KDG}$, $\overset{\Delta}{GCP}$, $\overset{\Delta}{LBQ}$.

Siga $x = \overline{DK} = \overline{FK}$. $\overline{DG} = \frac{c}{2}$, $\overline{GK} = c - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDG}$:

$(c-x)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + x^2$. Resolent l'equació en la incògnita x: $x = \frac{3}{8}c$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDG}$ és:

$$S_{KDG} = \frac{x\frac{c}{2}}{2} = \frac{3}{32}c^2.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{KDG}$, $\overset{\Delta}{GCP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DK}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CP}}$. $\frac{\frac{3}{8}c}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{\overline{CP}}$. Aleshores, $\overline{CP} = \frac{2}{3}c$. $\overline{GP} = \overline{AL} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2c}{3}\right)^2} = \frac{5}{6}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GCP}$ és: $S_{GCP} = \frac{\frac{c}{2}\overline{CP}}{2} = \frac{1}{6}c^2$.

$\overline{LB} = c - \overline{AL} = \frac{c}{6}$.

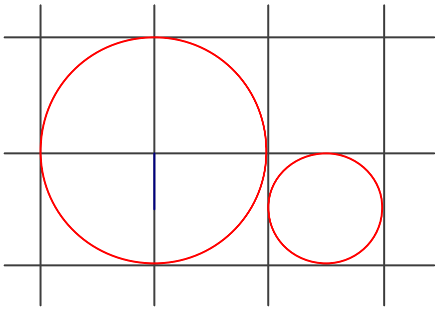
Els triangles $\overset{\Delta}{KDG}$, $\overset{\Delta}{QBL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DK}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{LB}}$. $\frac{\frac{3}{8}c}{\frac{c}{2}} = \frac{\overline{BQ}}{\frac{c}{6}}$. Aleshores, $\overline{BQ} = \frac{1}{8}c$.

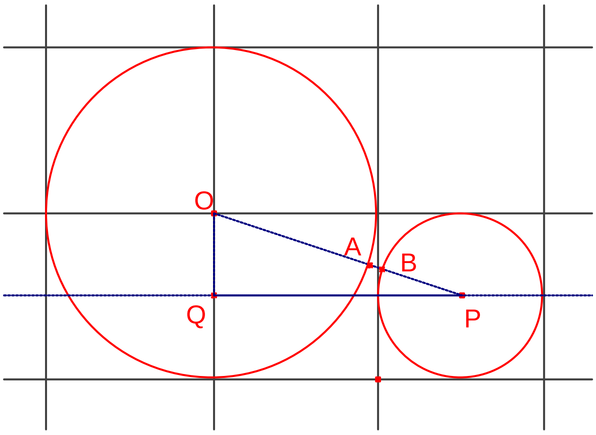
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBL}$ és: $S_{QBL} = \frac{\overline{LB} \cdot \overline{BQ}}{2} = \frac{1}{96}c^2$.

L'àrea de l'hexàgon AKGPQL és: $S_{AKGPQL} = c^2 - \left(\frac{3}{32}c^2 + \frac{1}{6}c^2 + \frac{1}{96}c^2\right) = \frac{35}{48}c^2$.

324.- En un full quadriculat en què cada quadrat té costat 2, s'han dibuixat dos cercles com els de la figura.
Determineu la distància mínima entre els dos cercles.



Solució:



Siga O el centre de la circumferència gran de radi 2.
Siga P el centre de la circumferència menuda de radi 1.
La distància mínima entre els cercles els igual a la distància entre els punts d'intersecció dels dos cercles i la recta que passa pels centres del dos cercles.

Dibuixem la recta paral·lela a les horitzontals de la quadrícula que passa pel punt P.

Siga Q la intersecció d'aquesta recta i la recta perpendicular de la quedrícula que passa pel punt O.

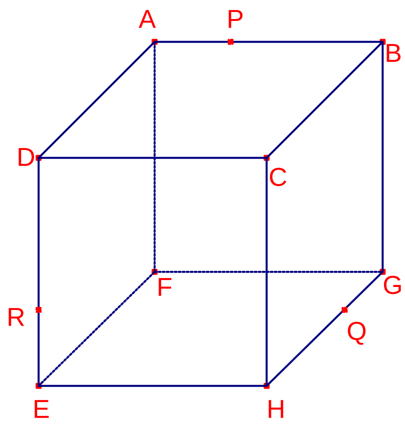
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ la distància entre el centres dels dos cercles és:
$\overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.
La distància mínima entre els cercles és:
$\overline{AB} = \overline{PQ} - \left(\overline{OA} + \overline{PB}\right) = \sqrt{10} - (2 + 1) = \sqrt{10} - 3$.

325.- Siga ABCDEFGH un cub d'aresta 3.

El punt P pertany a l'aresta $\overline{AB}$ a una distància de A $\frac{1}{3}\overline{AB}$.

El punt Q pertany a l'aresta $\overline{GH}$ a una distància de Q $\frac{1}{3}\overline{GH}$.

El punt R pertany a l'aresta $\overline{ED}$ a una distància de E $\frac{1}{3}\overline{ED}$.



Quin tipus de triangle és $\overset{\Delta}{PQR}$?. Calculeu la seua àrea.

Demostreu que la piràmide de base $\overset{\Delta}{PQR}$ i vèrtex C és recta?.

Solució:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAP}$ $A = 90º$. Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{DP} = \sqrt{10}$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{RDP}$ $D = 90º$. Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{PR} = \sqrt{14}$.

Anàlogament, $\overline{PQ} = \overline{RH} = \sqrt{14}$.

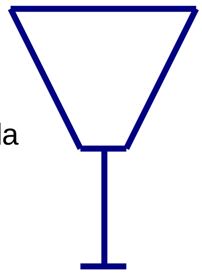
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter.
La seua àrea és:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PQ}^2 = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Per veure que la piràmide de base $\overset{\Delta}{PQR}$ i vèrtex C és recta és recta, és suficient veure que els triangles que formen les cares laterals són isòsceles i iguals.

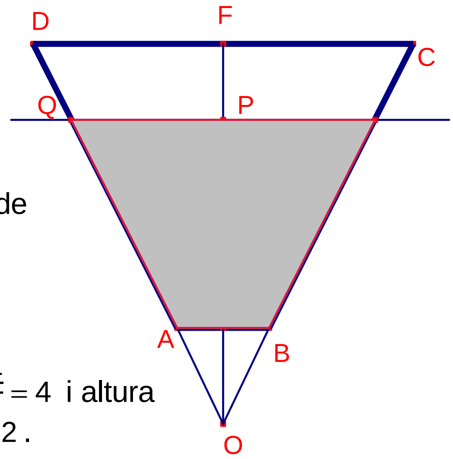
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBC}$ $B = 90º$. Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{PC} = \sqrt{13}$.

Anàlogament, $\overline{QC} = \overline{RC} = \sqrt{13}$.



326.- Una copa de cava té forma de con truncat.
El radi de la base és 1cm i el radi de la boca és 4cm i l'altura del con truncat 6cm
Quina altura ha de tindre el líquid a fi que siga la meitat de la cabuda de la copa.
KöMaL C1079.

Solució:
Siga ABCD la secció trapezoïdal de la copa.



Siga E el punt mig de la base $\overline{AB}$ i F el punt mig de $\overline{CD}$
$\overline{AB}=2$, $\overline{CD}=8$, $\overline{EF}=6$.
Siga O la intersecció de les rectes BC, AD.
Siga $h=\overline{OE}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{OAE}$, $\overset{\Delta}{ODF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{h}{1}=\frac{h+6}{4}$. Resolent l'equació:
$h=2$.
El volum del tronc truncat és igual al volum del con de radi $\overline{DF}=4$ i altura $\overline{OF}=8$, menys el volum del con de radi $\overline{AE}=1$ i altura $\overline{OE}=2$.

$$V_{copa}=\frac{1}{3}\pi 4^2\cdot 8-\frac{1}{3}\pi 1^2\cdot 2=\frac{1}{3}\pi\cdot 126.$$

Siga $x=\overline{EP}$, l'altura que assoleix el líquid quan té la meitat de la cabuda de la copa.
Siga $r=\overline{PQ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{OAE}$, $\overset{\Delta}{OQP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x+2}{r}=\frac{2}{1}$, aleshores, $r=\frac{x+2}{2}$.

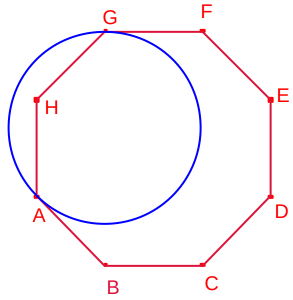
El volum de la meitat de la copa és:

$V_{meitat}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x+2}{2}\right)^2\cdot(x+2)-\frac{1}{3}\pi 1^2\cdot 2=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\pi\cdot 126$. Simplificant l'equació:

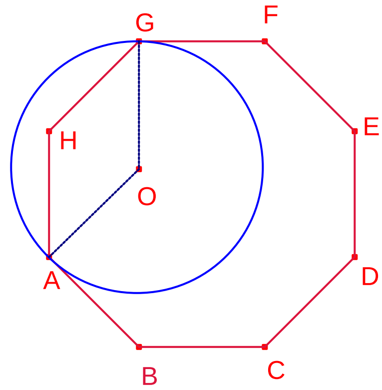
$(x+2)^3=260$. Resolent l'equació:

$x=\sqrt[3]{260}-2\approx 4'4\text{cm}$.

327.- En l'octògon regular ABCDEFGH dibuixem una circumferència tangent al segment $\overline{AB}$ en A i al segment $\overline{FG}$ en G.
Calculeu la mesura angular del l'arc menor de la circumferència.

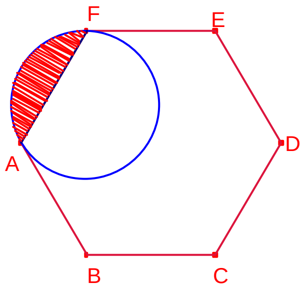


Solució:
L'angle interior d'un octògon regular és:
$\angle AHG = 180º - 45º = 135º$.
La recta perpendicular al segment $\overline{AB}$ en A passa pel centre O de la circumferència.
La recta perpendicular al segment $\overline{FG}$ en G passa pel centre O de la circumferència.
$\angle OAH = \angle OGH = 135º - 90º = 45º$.

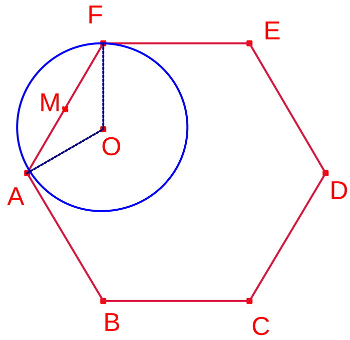


Aleshores l'angle central $\angle AOG$ mesura:
$\angle AOG = 360º - (\angle AHG + \angle OAH + \angle OGH) = 135º$.
Aleshores, el radi de la circumferència és igual al costat de l'octògon.

328.- En l'hexàgon regular ABCDEF de costat 10 dibuixem una circumferència tangent al segment $\overline{AB}$ en A i al segment $\overline{FE}$ en F.
Calculeu l'àrea del segment circular ombrejat.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
L'angle interior d'un hexàgon regular és el suplementari de l'angle central:
$\angle BAF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
La recta perpendicular al segment $\overline{AB}$ en A passa pel centre O de la circumferència.
La recta perpendicular al segment $\overline{FE}$ en F passa pel centre O de la circumferència.
$\angle OAF = \angle OFA = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.
Aleshores l'angle central $\angle AOF$ mesura:
$\angle AOF = 180^\circ - (\angle OAF + \angle OFA) = 120^\circ$.



L'àrea del segment circular és igual a la tercera part de l'àrea del cercle menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOF}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AF} = 10$, $\overline{AM} = 5$.

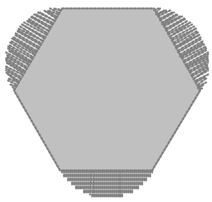
$$\overline{OA} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOF}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter de costat $\overline{OA}$

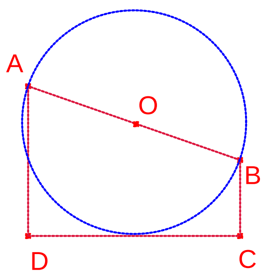
$$S_{AOF} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del segment és:

$$S_{segment} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{25\sqrt{3}}{3} = \frac{100\pi}{9} - \frac{25\sqrt{3}}{3} \approx 20'47.$$



329.- En el trapezi rectangle ABCD de la figura, la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ és tangent al costat $\overline{CD}$. Si els costats paral·lels $\overline{AD} = 4$ i $\overline{BC} = 2$. Calculeu l'àrea del trapezi.



Solució:

Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$ centre de la circumferència.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{CD}$.
$\overline{OT}$ és perpendicular a $\overline{CD}$ i paral·lela mitjana del trapezi.

Aleshores, $\overline{OT} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} = 3$.

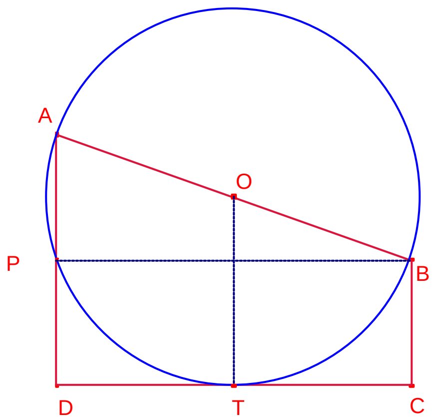
Aleshores, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OT} = 6$.

Siga P la projecció de B sobre $\overline{AD}$.
$\overline{AP} = \overline{AD} - \overline{BC} = 4 - 2 = 2$

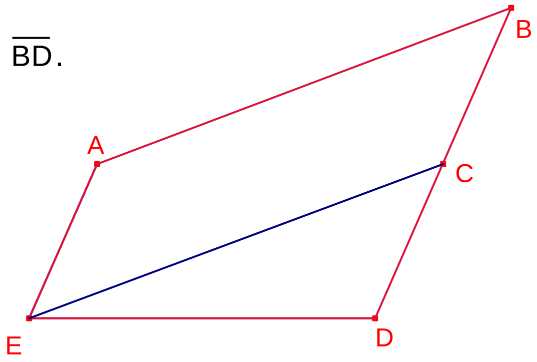
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{PB} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$S_{ABCD} = \dfrac{\overline{Ad} + \overline{BC}}{2} \overline{CD} = \dfrac{4+2}{2} 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.



330.- En la figura C és el punt mig del segment $\overline{BD}$.
ABCE és un paral·lelogram d'àrea 44.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ABDE.



Solució:

El quadrilàter ABDE és un trapezi ja que $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ són paral·lels.

L'àrea del paral·lelogram ABCE és doble que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ ja que tenen la mateixa base $\overline{BC} = \overline{CD}$ i la mateixa altura sobre aquests costats.

Aleshores, $S_{CDE} = \frac{44}{2} = 22$.

L'àrea del trapezi ABDE és:

$S_{ABDE} = S_{ABCE} + S_{CDE} = 44 + 22 = 66$.