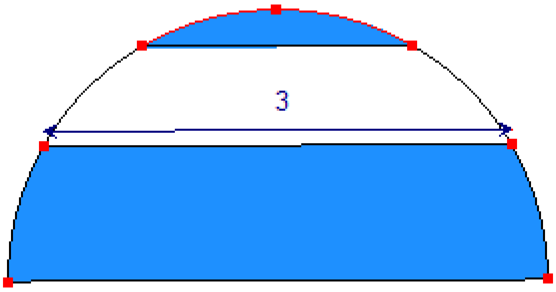
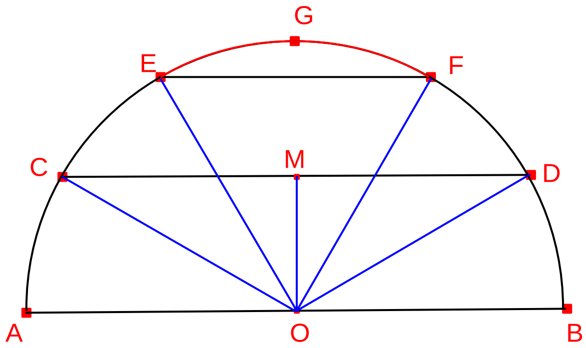
3291.- Els punts de la semicircumferència estan igualment separats.
Determineu l'àrea de la superfície ombrejada.
14 de març de 2021. Dia de π



Solució:

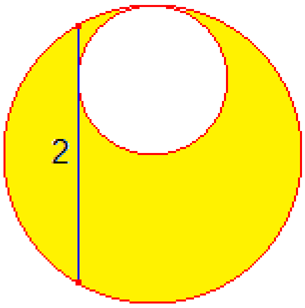


Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Sigua $\overline{AC} = \overline{CE} = \overline{EG} = \overline{GF} = \overline{FD} = \overline{DB}$
Aleshores, $\angle AOC = 30°$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{CD} = 3$
$\angle COM = 60°$

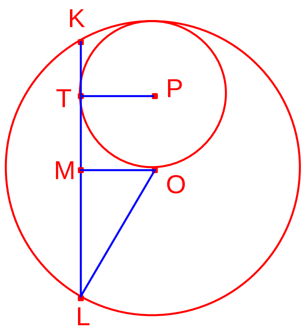
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:
$\overline{OC} = \sqrt{3}$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea de tres sectors circulars de centre O, radi $\overline{OC} = \sqrt{3}$ i angles $30°, 60°, 30°$, és a dir, l'àrea d'un sector circular de de centre O, radi $\overline{OC} = \sqrt{3}$ i angle $120°$

$$S = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = \pi$$

3292.- En la figura la circumferència interior és tangent a la exterior i passa pel seu centre.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.
14 de març de 2021. Dia de π

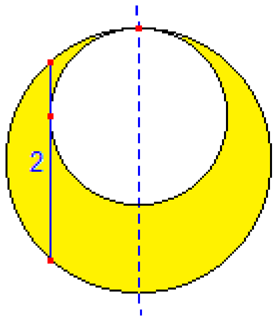


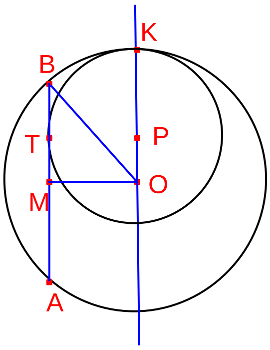
Solució:
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PO} = r$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = 2r$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{KL} = 2$.
$\overline{OM}$ és perpendicular a la corda $\overline{KL}$
$\overline{OM} = r, \overline{LM} = 1$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMO}$:
$4r^2 = 1 + r^2$
$r^2 = \dfrac{1}{3}$
L'àrea ombrejada és igual a la diferència entre els dos cercles:
$S_{ombrejada} = \pi 4r^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2 = \pi$

Generalització.
En la figura la circumferència interior és tangent a la exterior.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

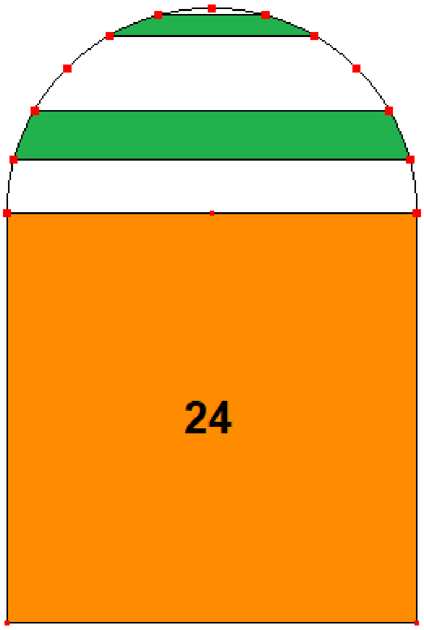




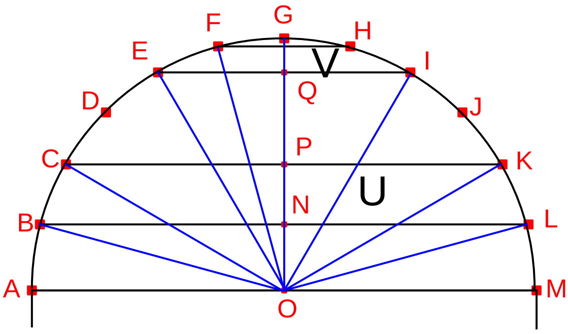
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = \overline{PK} = a$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OB} = R$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB} = 2$.
$\overline{OM}$ és perpendicular a la corda $\overline{KL}$
$\overline{OM} = a, \overline{BM} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMO}$:
$R^2 = 1 + a^2$
L'àrea ombrejada és igual a la diferència entre els dos cercles:
$S_{ombrejada} = \pi R^2 - \pi a^2 = \pi$

3293.- Els punts de la semicircumferència estan igualment separats.
L'àrea del quadrat sobre el diàmetre de la semicircumferència és 24.
Determineu l'àrea de la superfície ombrejada.
14 de març de 2021. Dia de π



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AM}$
Sigua $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$
Aleshores, $\angle AOB = 15°, \angle AOC = 30°$

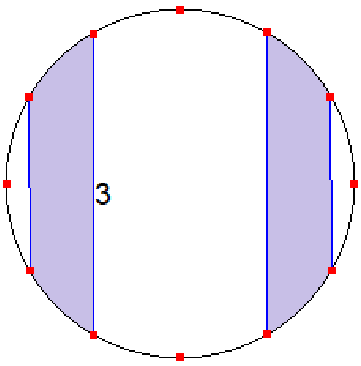
El quadrat sobre el diàmetre de la semicircumferència té àrea 24.
Aleshores, $\overline{AB} = 2\sqrt{6}$
Siguen U, V les dues zones ombrejades.

L'àrea de la regió U és igual a l'àrea de dos sectors $\widehat{BC}$ de centre O i radi $\overline{OB} = \sqrt{6}$ d'angle $15°$, més l'àrea del triangles $\overset{\Delta}{COK}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OBL}$

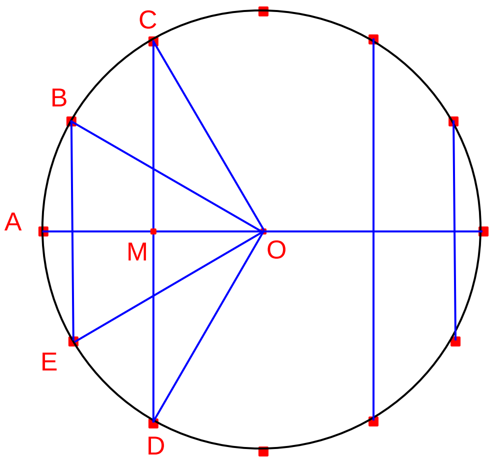
L'àrea de la regió V és igual a l'àrea de dos sectors $\widehat{FG}$ de centre O i radi $\overline{OB} = \sqrt{6}$ d'angle $15°$, més l'àrea del triangles $\overset{\Delta}{FOH}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OEI}$

Els triangles $\overset{\Delta}{COK}, \overset{\Delta}{OEI}$ tenen la mateixa àrea.
Els triangles $\overset{\Delta}{OBL}, \overset{\Delta}{FOH}$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores, la suma de les àrees és igual a l'àrea d'un sector circular de centre O i radi $\overline{OB} = \sqrt{6}$ d'angle $60°$,
$S_{ombrejada} = U + V = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{6}\right)^2 = \pi$

3294.- En la figura la circumferència s'ha dividit en 12 parts iguals.
Una corda mesura 3.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.
14 de març de 2021. Dia de π

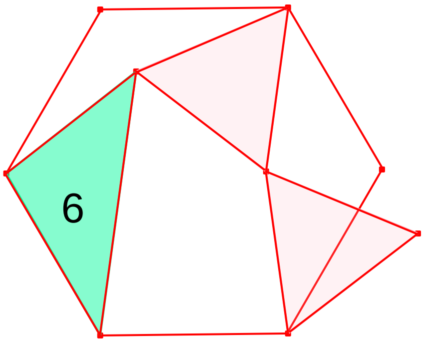


Solució:

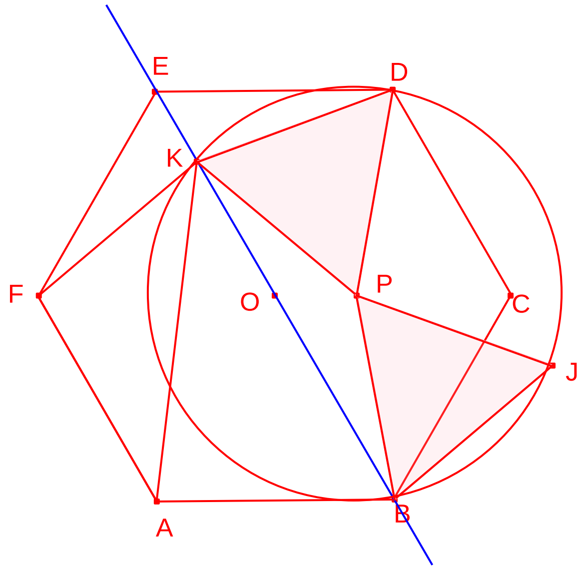


Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA}$
Sigua $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EA}$
Aleshores, $\angle AOB = 30°, \angle EOB = 60°, \angle AOC = 60°$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{CD} = 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:
$\overline{OC} = \sqrt{3}$
Cadascuna de les zones ombrejades és igual a l'àrea de dos sectors $\widehat{BC}$ de centre O i radi $\overline{OC} = \sqrt{3}$ d'angle $30°$, més l'àrea del triangles $\overset{\Delta}{BOC}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCD}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{BOC}, \overset{\Delta}{OCD}$ tenen la mateixa àrea.
Aleshores, la suma de les àrees ombrejades és igual a l'àrea d'un sector circular de centre O i radi $\overline{OC} = \sqrt{3}$ d'angle $120°$,
$S_{ombrejada} = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = \pi$

3295.- Els dos triangles equilàters són iguals.
El triangle no equilàter té àrea 6
Calculeu l’àrea de l’hexàgon regular.

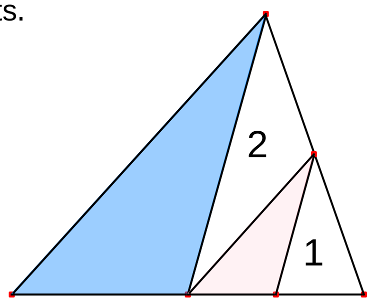


Solució:

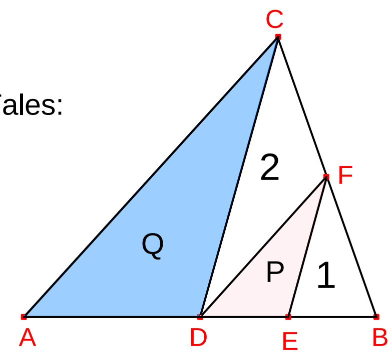


a=angleBKP=angleKBP
BJDK cíclic, centre P
BJDK trapezi
angle KBD=30º
angle DBC=30º
angleCBJ=a
angle KBC=60º
K pertany BE
[AFO]=6
[ABCDEF]=6·6=36

3296.- Els triangles blau i rosa de la figura són semblants.
Calculeu l'àrea del triangle exterior.

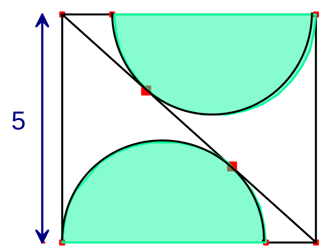


Solució:
Siga $S_{DEF} = P, S_{ADC} = Q$
Els triangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{DEF}$ són semblants.
Aleshores, $\overline{AC},\ \overline{DF}$ són paral·lels. $\overline{DC},\ \overline{EF}$ són paral·lels
Siga $\overline{BE} = x, \overline{BD} = rx$
Els triangles $\overset{\Delta}{DBC}, \overset{\Delta}{EBF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

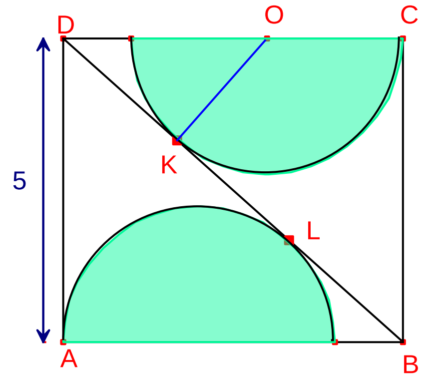


$$\frac{3+P}{1} = r^2$$
$$\frac{P+1}{1} = r$$
$P = r - 1$
$3 + P = r + 2 = r^2$
Aleshores, $r = 2$
Aleshores, E és el punt mig del segment $\overline{BD}$
Per tant, F és el punt mig de $\overline{BC}$
També, D és el punt mig de $\overline{AB}$
$P = 1, Q = 3 + P = 4$
$S_{ABC} = Q + 3 + P = 8$

3297.- La diagonal del rectangle s'ha dividit en tres parts iguals.
Si un costat mesura 5, calculeu la suma de les àrees dels dos semicercles ombrejats.

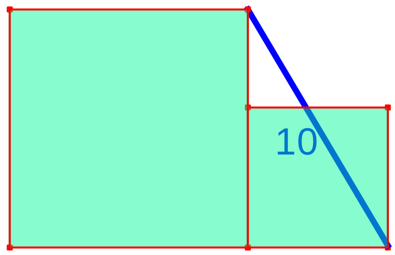


Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = 5$
Siga $\overline{DK} = \overline{KL} = \overline{LB} = a$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OK} = r$
$\overline{BK} = 2a = 5$
Aleshores, $a = \frac{5}{2}$

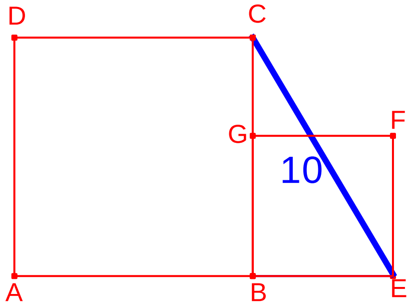


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$$\overline{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAB}, \overset{\Delta}{OKD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$
Resolent l'equació:
$r = \sqrt{5}$
La suma de les àrees de les dues semicircumferències és:
$S = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\pi$

3298.- En la figura calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats ombrejats.



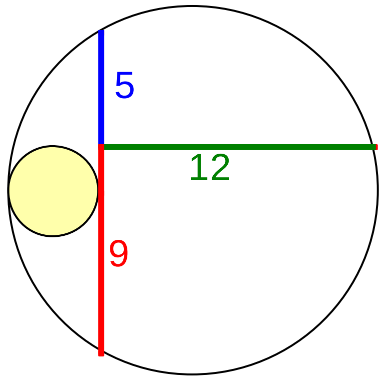
Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$

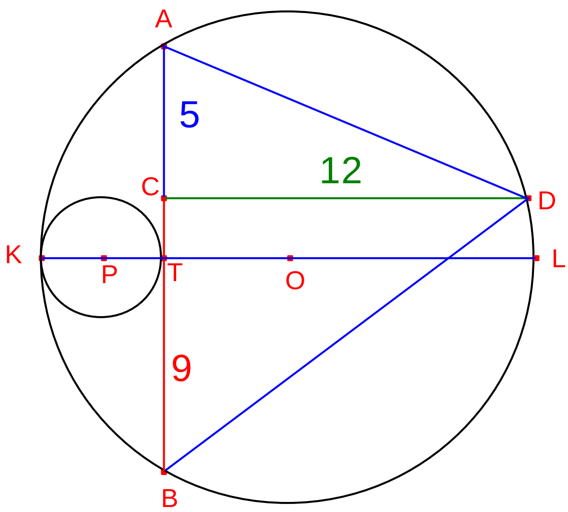
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBE}$:
$a^2 + b^2 = 10^2$
La suma de les àrees és:
$S_{ombrejada} = a^2 + b^2 = 100$

3299.- Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i el cercle exterior.



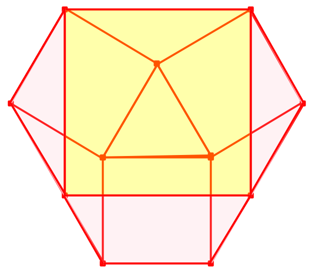
Solució:
Siguen $\overline{AC} = 5, \overline{BC} = 9, \overline{CD} = 12$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OK} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PT} = r$
$\overline{AT} = \overline{BT} = 7$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACD}, \overset{\Delta}{BCD}$
$\overline{AD} = 13, \overline{BD} = 15$



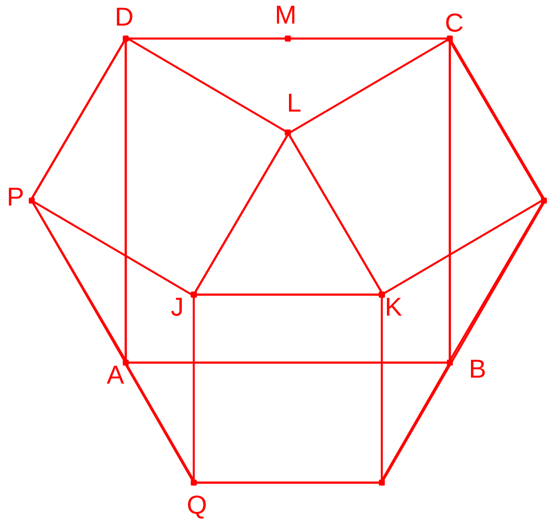
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 15}{4R}$$
Resolent l'equació:
$$R = \frac{65}{8}$$
Aplicant la potència del punt T respecte de la circumferència de centre O:
$$7 \cdot 7 = 2r \cdot (2R - 2r)$$
$$49 = \frac{65}{2} r - 4r^2$$
Resolent l'equació:
$$r = 2$$
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{16}{65}\right)^2 = \frac{256}{4225}$$

3300.- Els quadrats de la figura són iguals i tenen costat 1.
Calculeu l'àrea del rectangle groc.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{JKL}$ de costat $\overline{JK} = 1$
Siga el rectangle $ABCD$.
$\angle CLD = \angle PJQ = 120°$
$\angle LDC = \angle QPJ = 30°$
$\angle PDC = 120°$
$\angle PDA = 30°$



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DLC}, \overset{\Delta}{DPA}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{CD} = \overline{AD}$
Aleshores, $ABCD$ és un quadrat.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LMD}$:
$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\overline{CD} = \sqrt{3}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$