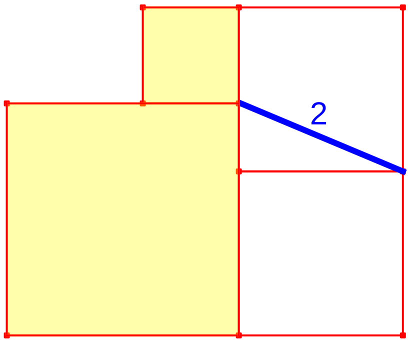
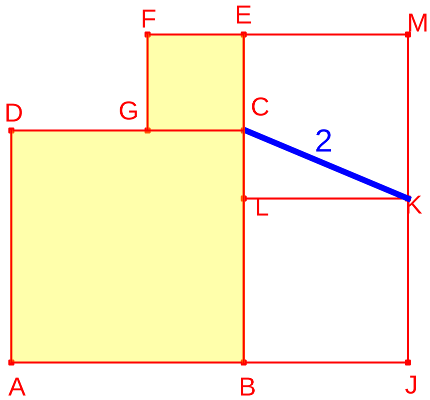
3301.- Donats els quatre quadrats de la figura. Calculeu la suma de les àrees dels dos quadrats ombrejats.

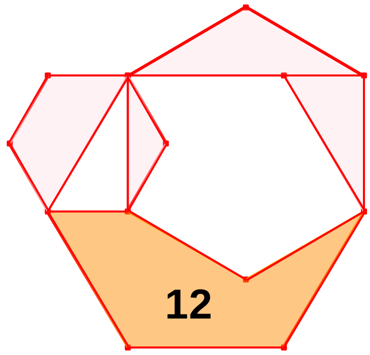


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BJKL$ de costat $\overline{BJ} = b$
Siga $\overline{CJ} = 2$
$\overline{CL} = a - b, \overline{CE} = 2b - a$

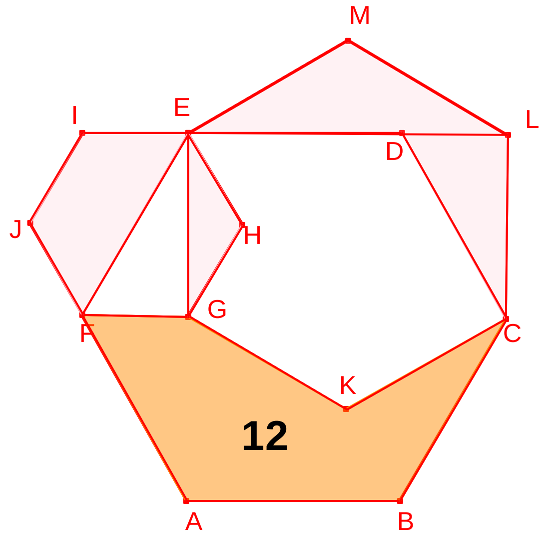


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CLK}$:
$b^2 + (a - b)^2 = 4$
$2b^2 + a^2 - 2ab = 4$
La suma de les àrees dels quadrats $ABCD, CEFG$ és:
$S = a^2 + (2b - a)^2 = 2(2b^2 + a^2 - 2ab) = 8$

3302.- En la figura hi ha tres hexàgons regulars. Si l’àrea de color taronja és 12, calculeu l’àrea ombrejada de rosa.



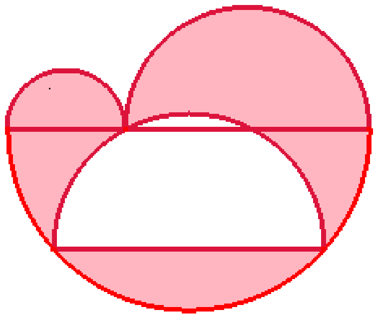
Solució:
Siga l’hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 2c$
Siga l’hexàgon regular $FGHEIJ$ de costat $\overline{FG} = c$
Siga l’hexàgon regular $JCLMEG$ de costat $\overline{EG} = c\sqrt{3}$



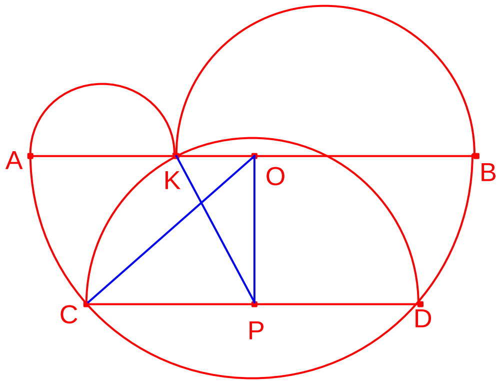
L’àrea de l’hexàgon $ABCKGF$ és 12:
$12 = S_{ABCF} - S_{KCG}$
$12 = \frac{3}{4}\sqrt{3}c^2 - \frac{3}{16}\sqrt{3}c^2$
Simplificant:
$\sqrt{3}c^2 = \frac{16}{3}$

$S_{FEIJ} = \frac{3}{4}\sqrt{3}c^2$
$S_{GHE} = \frac{1}{4}\sqrt{3}c^2$
$S_{ELM} = \frac{3}{4}\sqrt{3}c^2$
$S_{DLC} = \frac{1}{2}\sqrt{3}c^2$
$S_{rosa} = S_{FEIJ} + S_{GHE} + S_{ELM} + S_{DLC} = \frac{9}{4}\sqrt{3}c^2 = 12$

3303.- La figura està formada per quatre semicercles que tenen els diàmetres paral·lels.
El diàmetre més gran mesura 8.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



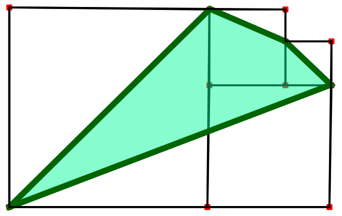
Solució:



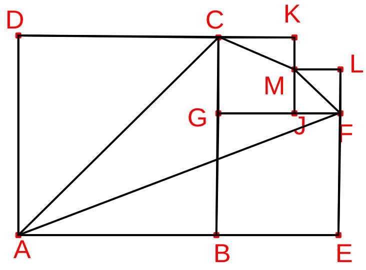
Siga $\overline{AB} = 8$ diàmetre de la semicircumferència gran de centre O.
Siga $\overline{AK} = 2r$.
Siga $\overline{CD} = 2s$ diàmetre de la semicircumferència de centre P

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $K\overset{\Delta}{O}P, C\overset{\Delta}{P}O$:
$\overline{OP}^2 = s^2 - (4-2r)^2 = 16 - s^2$
Simplificant:
$s^2 - 2r^2 + 8r = 16$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = \frac{\pi}{2}(r^2 + (4-r)^2 + 4^2 - s^2) = \frac{\pi}{2}(-s^2 + 2r^2 - 8r + 32) = 8\pi$$

3304.- La figura està formada per quatre quadrats.
L'àrea del quadrilàter ombrejat és 7.
Calculeu la suma de les àrees dels quatre quadrats.



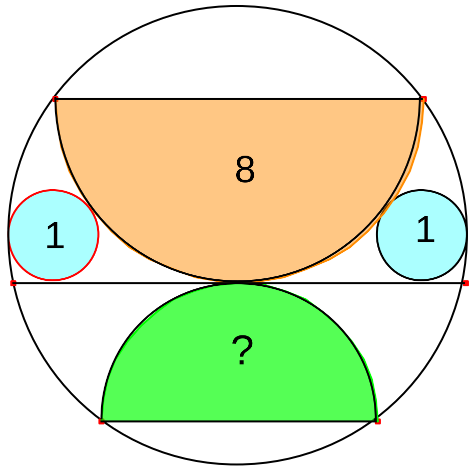
Solució:



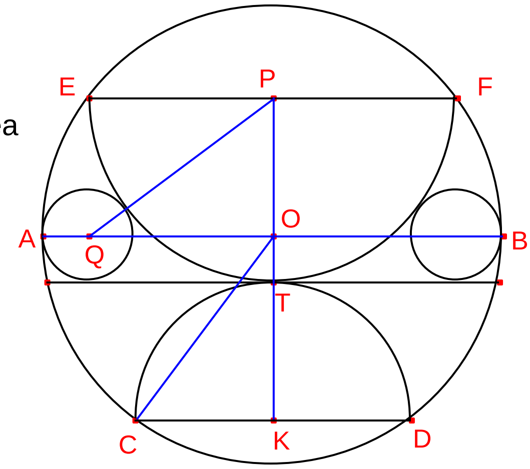
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = b$
Siga el quadrat $GJKC$ de costat $\overline{GJ} = a - b$
Siga el quadrat $JFLM$ de costat $\overline{JF} = 2b - a$
Siga el quadrilàter $AFMC$ d'àrea 7.
L'àrea del quadrilàter $AFMC$ és:
$7 = S_{AFMC} = S_{ABC} + S_{BEFG} - S_{AEF} + S_{GJMC} + S_{JFM}$
$7 = \frac{1}{2}a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a+b)b + \frac{1}{2}b(a-b) + \frac{1}{2}(2b-a)^2$
Simplificant:
$a^2 + 2b^2 - 2ab = 7$

La suma de les àrees dels quatre quadrats és:
$S_{total} = a^2 + b^2 + (a-b)^2 + (2b-a)^2 = 3(a^2 + 2b^2 - 2ab) = 21$

3305.- En la figura, determineu l'àrea del semicercle verd.



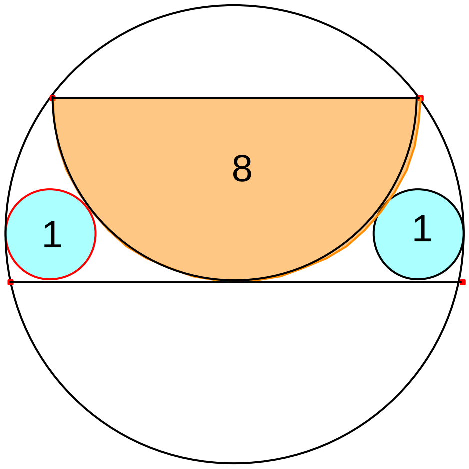
Solució:
Siguen A, B, els punts de tangència de la circumferència exterior i les dues circumferències tangents interiors iguals.
El segment $\overline{AB}$ passa pel centre O de la circumferència exterior.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.
Siga la circumferència de centre Q radi $\overline{QA} = r$ i àrea 1.
$\pi r^2 = 1$
Siga la semicircumferència de centre P radi $\overline{PE} = s$ i àrea 8.



$\frac{1}{2}\pi s^2 = 8$
Dividint ambdues expressions:
$\frac{s}{r} = 4$
$s = 4r$
$\overline{OP} = 3r, \overline{PQ} = 5r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{QOP}$:
$\overline{OQ} = 4r$
Aleshores:
$R = 5r$

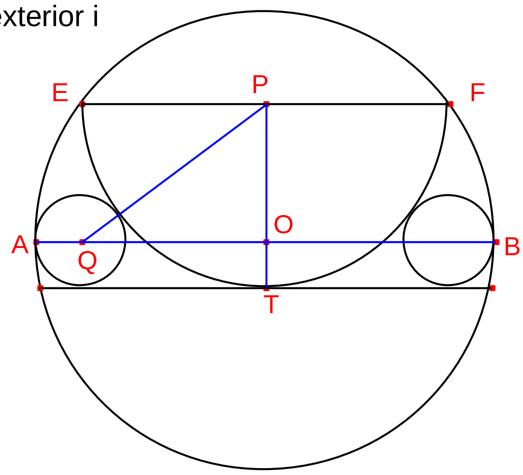
Siga la semicircumferència de centre K i radi $\overline{KC} = x$
$\overline{OC} = 5r, \overline{OK} = x + r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CKO}$:
$25r^2 = x^2 + (x + r)^2$
Simplificant:
$x^2 + rx - 12r^2 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 3r$
L'àrea del semicercle de radi x és:
$S_K = \frac{1}{2}\pi x^2 = \frac{9}{2}\pi r^2 = \frac{9}{2}$

3306.- En la figura, determineu la proporció entre l'àrea de la sona ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



Solució:

Siguen A, B, els punts de tangència de la circumferència exterior i les dues circumferències tangents interiors iguals.



El segment $\overline{AB}$ passa pel centre O de la circumferència exterior.

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.

Siga la circumferència de centre Q radi $\overline{QA} = r$ i àrea 1.

$\pi r^2 = 1$

Siga la semicircumferència de centre P radi $\overline{PE} = s$ i àrea 8.

$\frac{1}{2}\pi s^2 = 8$

Dividint ambdues expressions:

$\frac{s}{r} = 4$

$s = 4r$

$\overline{OP} = 3r, \overline{PQ} = 5r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{QOP}$:

$\overline{OQ} = 4r$

Aleshores:

$R = 5r$

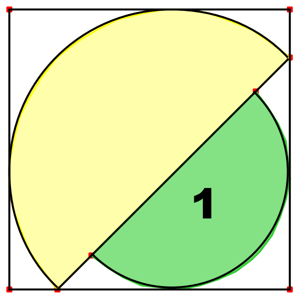
L'àrea del cercle exterior és:

$S_O = \pi R^2 = 25\pi r^2 = 25$

La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{1+8+1}{25} = \frac{2}{5}$

3307.- En un quadrat s'han inscrit dos semicercles. Si el semicercle menut té àrea 1, calculeu l'àrea del semicercle gran.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siga el semicercle de centre O diàmetre $\overline{KL} = 2r$ i àrea 1.

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 1$

$\pi r^2 = 2$

$\overline{OM} = \overline{ON} = r$

$\overline{PM} = r$

Siga el semicercle de centre P diàmetre $\overline{PQ} = 2s$.

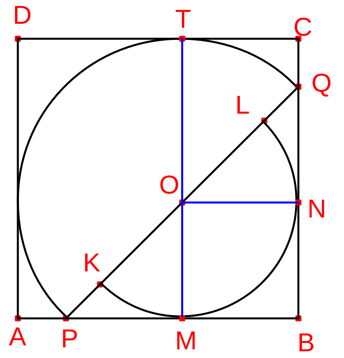
$\overline{OP} = s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:

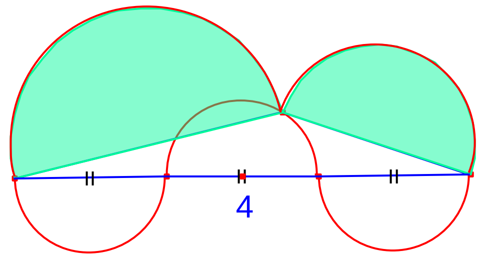
$s^2 = 2r^2$

L'àrea del semicercle de radi s és:

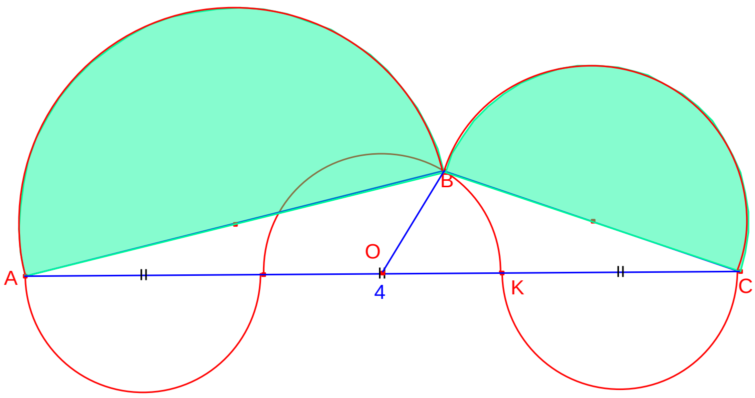
$S_{groc} = \frac{1}{2}\pi s^2 = \pi r^2 = 2$



3308.- Donades cinc semicircumferències (tres d'elles de diàmetre 4), calculeu l'àrea dels semicercles ombrejats.



Solució:



AB=D

BC=d

a=angleBOC

OK=r=2

Teorema cosinus OBC

$d^2=r^2+9r^2-2\cdot 3\cdot \cos(a)$

Teorema cosinus AOB

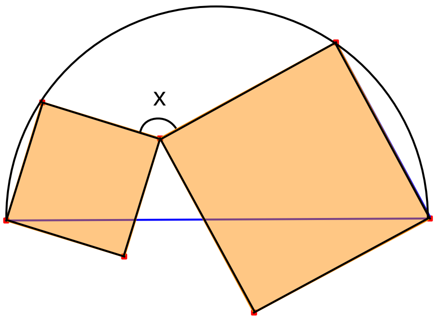
$D^2=r^2+9r^2+2\cdot 3\cdot \cos(a)$

$d^2+D^2=20r^2$

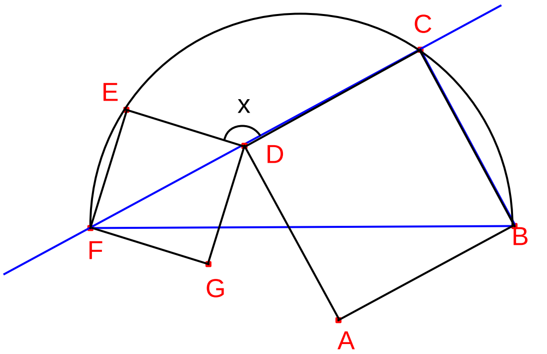
$S=(1/2)PI\cdot((d/2)^2+(D/2)^2)$

$S=(1/8)PI\cdot(d^2+D^2)=10\cdot PI$

3309.- En un semicercle s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x.

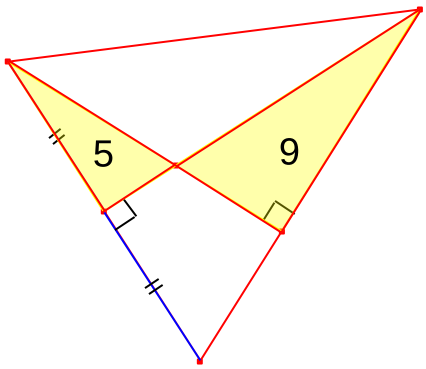


Solució:

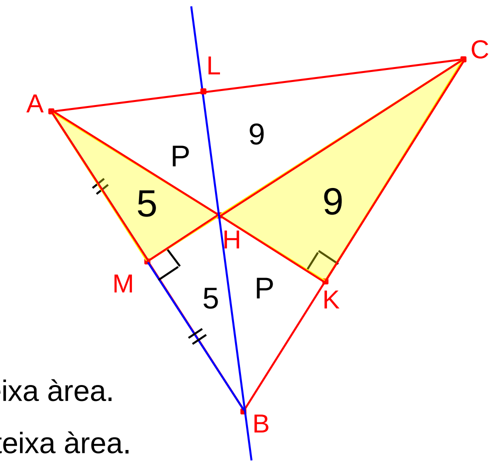


Siguen els quadrats $ABCD, DEFG$.
Com $\angle DCB = 90°$, la recta CD passa pel punt F
$x = 180° - \angle FDE = 180° - 45° = 135°$

3310.- En el triangle de la figura les àrees de les zones ombrejades són 5 i 9, respectivament. Calculeu l'àrea del triangle.



Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$\overline{CM}, \overline{AK}$ són altures del triangle.

Siga H l'ortocentre intersecció de les dues altures.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\overline{AC} = \overline{BC}$

$\overline{BH}$ és altura del triangle$\overset{\Delta}{ABC}$

$\overline{CM}$ és mediatriu del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CKH}, \overset{\Delta}{CLH}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMH}, \overset{\Delta}{BMH}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

Els triangles $\overset{\Delta}{BKH}, \overset{\Delta}{ALH}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

Siga $P = S_{BKH} = S_{ALH}$

$$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}$$

$$\frac{10 + P}{18 + P} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}$$

$$\frac{S_{BHK}}{S_{CHK}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}$$

$$\frac{P}{9} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CK}}$$

Aleshores:

$$\frac{10 + P}{18 + P} = \frac{P}{9}$$

$$P^2 + 9P - 90 = 0$$

Resolent l'equació:

$$P = 6$$

$$S_{ABC} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot P = 40$$