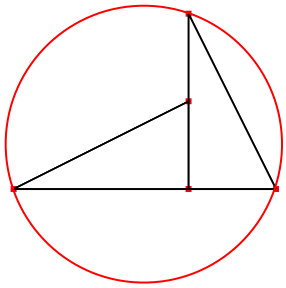
3311.-En la figura els triangles rectangles són iguals i la proporció entre els catets és $1:2$.
El radi de la circumferència és 15.
Calculeu l'àrea d'un rectangle.



Solució:

Siguen els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EBD}$, $\overline{BC} = \overline{BD} = x, \overline{AB} = \overline{BE} = 2x$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és isòsceles.

$\angle EAB = 45°$

$\overline{DE}$ és el costat del quadrat $DEKL$ inscrit en la circumferència de radi $\overline{OE} = 15$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBD}$:

$\overline{DE}^2 = 5x^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LDE}$:

$\overline{EL}^2 = 2 \cdot \overline{DE}^2$

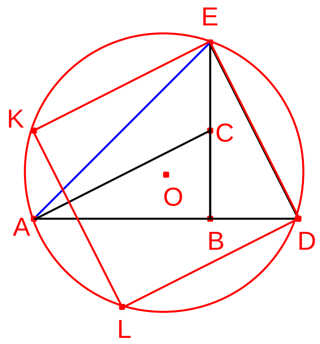
$30^2 = 2 \cdot 5x^2$

Simplificant:

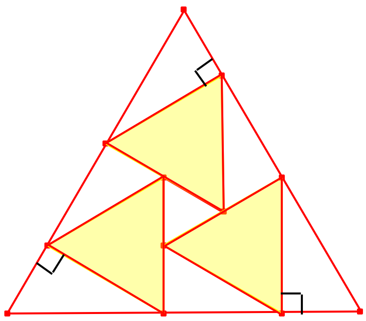
$x^2 = 90$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

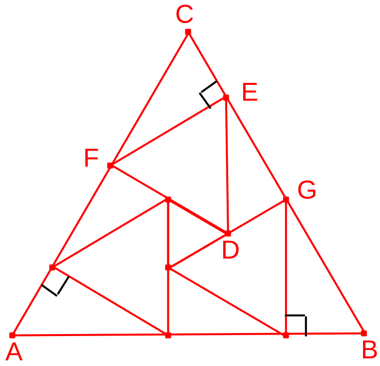
$S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot 2x = x^2 = 90$



3312.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada pels tres triangles equilàters i l'àrea del triangle exterior.



Solució:
Notem que els tres triangles equilàters ombrejats són iguals.



Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEF}$:

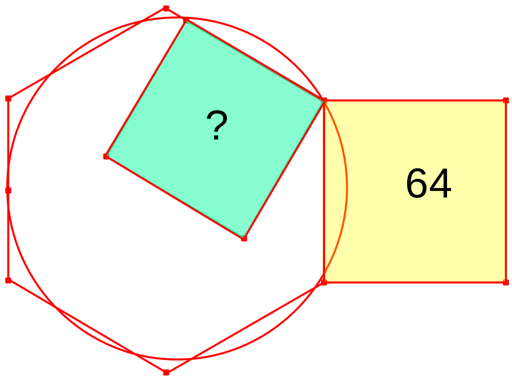
$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3}c, \overline{FE} = \overline{GE} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{CF} = \overline{BG} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}c$$

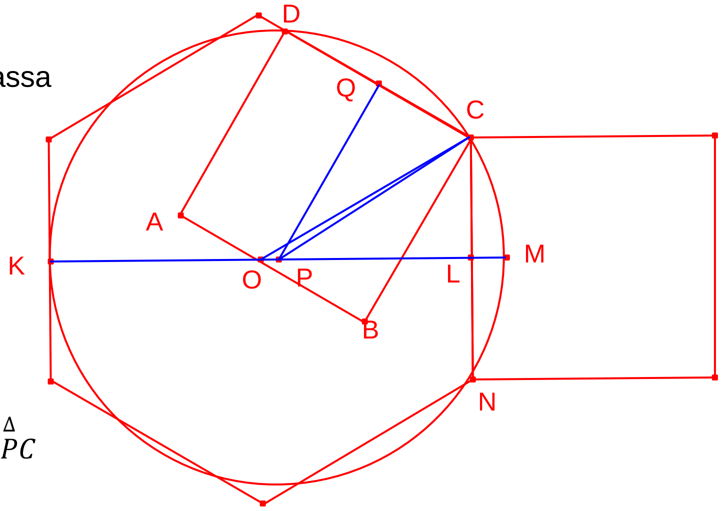
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombejada}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}c\right)^2} = \frac{4}{9}$$

3313.- En la figura, el quadrat groc té àrea 64.
Calculeu l'àrea del quadrat verd.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga P el centre de la circumferència que passa pels vèrtex $C, D, i\ N$ de radi $\overline{PC} = r$
Siga Q la projecció de P sobre $\overline{CD}$



$\overline{CQ} = \frac{1}{2}c$
Siga O el centre de l'hexàgon regular.
Siga L el punt mig del costat $\overline{CN} = 8$
$\overline{OC} = 8, \overline{KL} = 8\sqrt{3}$
$\overline{OP} = r - 4\sqrt{3}$
$\angle COP = 60°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OPC}$

$$r^2 = 64 + \left(r - 4\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 8\left(r - 4\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$\angle QPL = 60°$
Siga $\alpha = \angle CPL$

$$\sin\alpha = \frac{4}{r}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - 16}}{r}$$

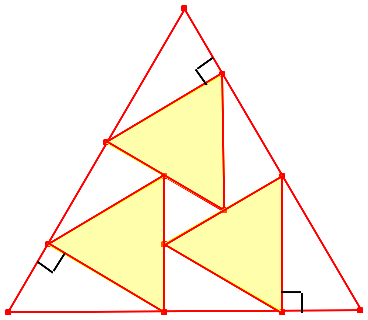
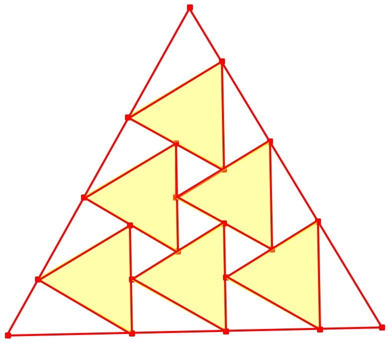
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQC}$:

$$\frac{c}{2r} = \sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{r^2 - 16}}{r} - \frac{1}{2}\frac{4}{r}$$

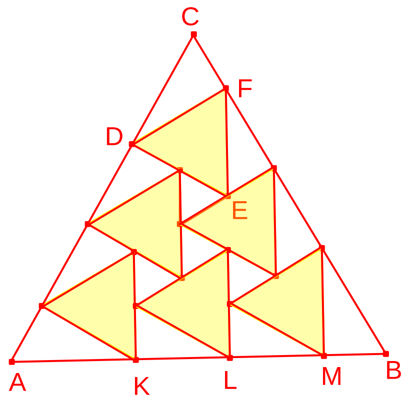
$$c = \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 16} - 4 = 7$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 7^2 = 49$

3314.- Calculeu el límit de la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle equilàter exterior.

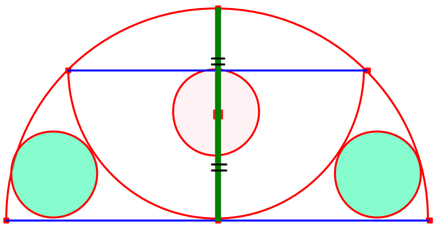
Solució:
Siga $n = 1, 2, 3$
El nombre de triangles equilàters ombrejats és:
$$t_n = 3, 6, 10, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
Siga el triangle equilàter ombrejat $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat $\overline{DE} = c$
Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$

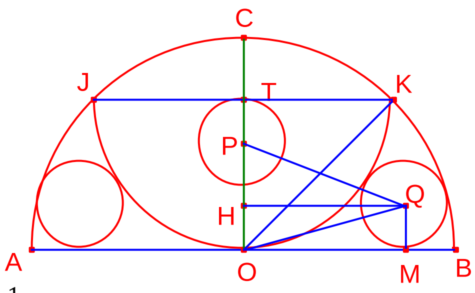


Siga $n = 2$
$$\overline{AK} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c, \overline{KL} = \overline{LN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$$
$$\overline{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c + 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{3}c = c\sqrt{3}\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Per a $n = k$
$$\overline{AB} = c\sqrt{3}\left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right)$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(c\sqrt{3}\left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)c^2\right)$$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}{3\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 4k + 4}$$
El límit és:
$$\lim_{k \to \infty} \frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 4k + 4} = \frac{2}{3}$$

3315.- En la figura, proveu que la circumferència rosa i la verda tenen el mateix radi.





Solució:

Siga la semicircumferència de centre O i rafi $\overline{OB} = \overline{OC} = R$

$\overline{OP} = \overline{PC} = \frac{1}{2}R$

Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PT} = r$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QM} = s$

Siga la semicircumferència de centre T i radi $\overline{TO} = \overline{TK} = r + \frac{1}{2}R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OTK}$:

$$R = \left(r + \frac{1}{2}R\right)\sqrt{2}$$

$$R = 2(1+\sqrt{2})r$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}R + r + s, \overline{OQ} = R - s$$

Siga H la projecció de Q sobre el radi $\overline{OC}$.

$$\overline{PH} = \frac{1}{2}R + r - s, \overline{OH} = s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{PHQ}, \overset{\Delta}{OHQ}$:

$$\left(\frac{1}{2}R + r + s\right)^2 - \left(\frac{1}{2}R + r - s\right)^2 = (R-s)^2 - s^2$$

Simplificant:

$$(R + 2r)2s = R(R - 2s)$$

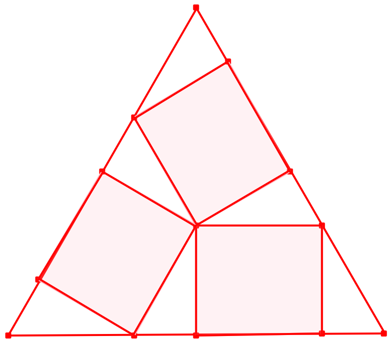
$$4Rs + 4rs = R^2$$

$$4 \cdot 2(1+\sqrt{2})rs + 4rs = \left(2(1+\sqrt{2})r\right)^2$$

$$(3 + 2\sqrt{2})rs = \left((1+\sqrt{2})r\right)^2$$

$$r = s$$

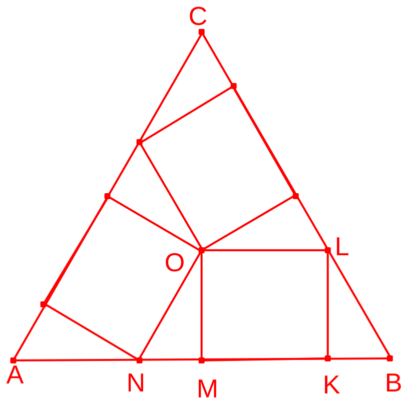
3316.- Calculeu la proporció entre l'àrea de la zona ombrejada formada per tres rectangles iguals i l'àrea del triangle equilàter exterior.



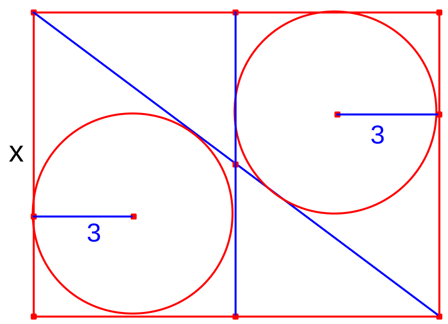
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.
Siga el rectangle $OMKL$
$\overline{KB} = \overline{NM} = a$
$\overline{BL} = \overline{MK} = \overline{OL} = \overline{AN} = 2a, \overline{KL} = a\sqrt{3}$
$\overline{AB} = 6a$
La proporció d'àrees és:

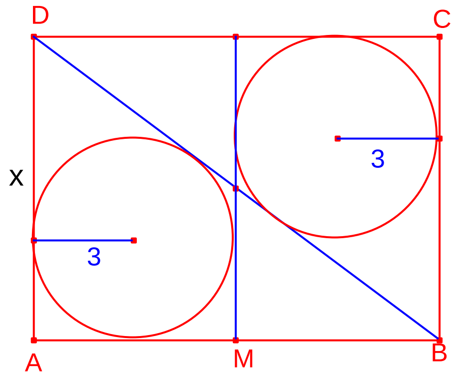
$$\frac{3 \cdot S_{OMKL}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 2a \cdot a\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}(6a)^2} = \frac{2}{3}$$



3317.- En la figura, calculeu el costat x del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$, $\overline{AD} = x$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
$\overline{AM} = 6, \overline{AB} = 12$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \sqrt{x^2 + 144}$

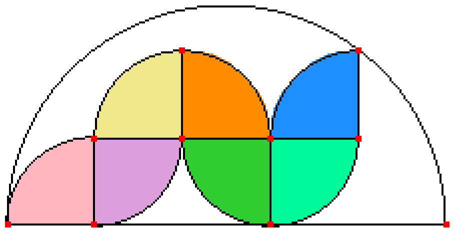
Siga $r = 3$ radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$.

$$r = 3 = \frac{x + \overline{AB} - \overline{BD}}{2}$$

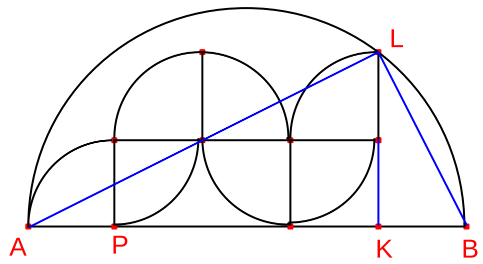
$$3 = \frac{x + 12 - \sqrt{x^2 + 144}}{2}$$

Resolent l'equació:
$x = 9$

3318.- En la figura determineu la proporció entre la suma de les àrees dels set quadrants i l'àrea del semicercle exterior.

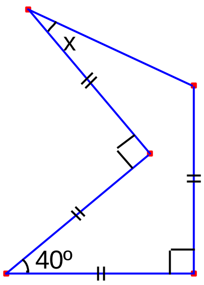


Solució:
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PA} = r$
$\overline{AK} = 4r, \overline{BK} = 2R - 4r, \overline{LK} = 2r$

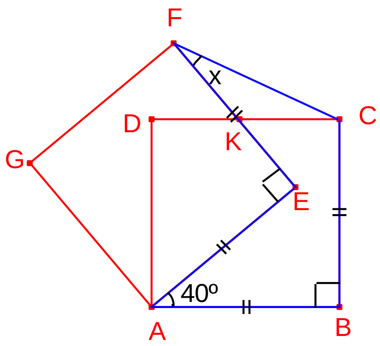


Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABL}$:
$(2r)^2 = 4r \cdot (2R - 4r)$
Simplificant:
$r = 2R - 4r$
$\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{7 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{7}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

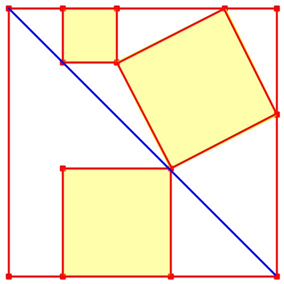
3319.- Calculeu la mesura de l'angle x.



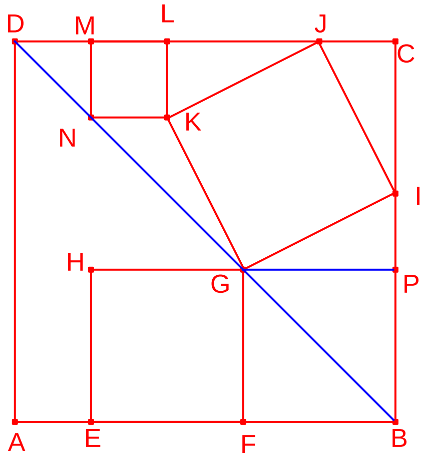
Solució:
Considerem els quadrat $ABCD, AEFG$.
Siga $\angle EAB = 40°, \angle EFC = x$
Siga K la intersecció de $\overline{CD}, \overline{EF}$.
$\overline{DK} = \overline{EK}, \overline{CK} = \overline{FK}$
$\angle DAE = 50°, \angle CKF = 130°$
$x = \frac{1}{2} 50° = 25°$



3320.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada pels tres quadrats i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



AB=1

EF=a, GI=b, KL=c

BF=BP=CI=JL=a

CD=a+3c=1
BC=2a+c=1

a=2/5, c=1/5
b=sqrt(5)/5

$a^2+b^2+c^2=2/5$