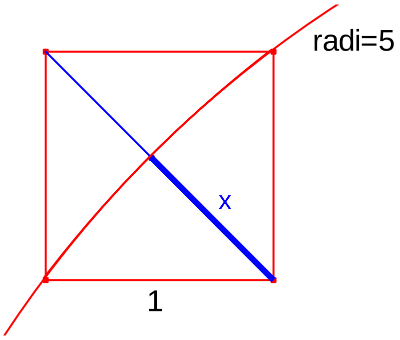
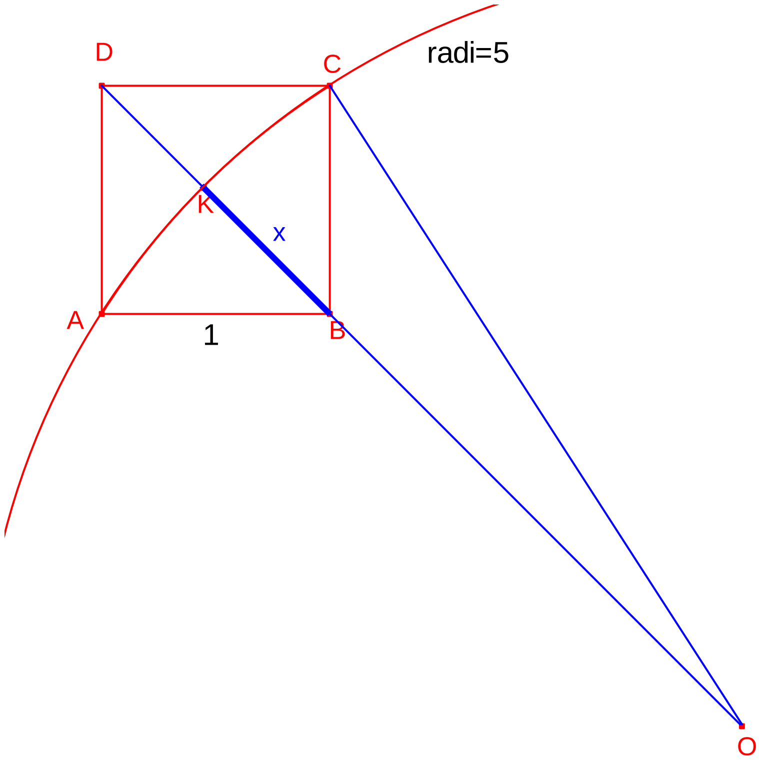
3321.- Donat un quadrat de costat 1 s'ha dibuixat un arc de radi 5 que passa per dos vèrtexs oposats del quadrat.
Calculeu la mesura del segment x.



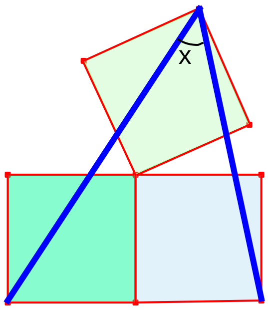
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga l'arc $\widehat{AC}$ de centre O i radi $\overline{OK} = \overline{OC} = 5$
Siga $x = \overline{BK}$
$\overline{OB} = 5 - x, \angle CBO = 135°$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$25 = (5-x)^2 + 1 + 2 \cdot (5-x)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Simplificant:
$x^2 - \left(10 + \sqrt{2}\right) + 5\sqrt{2} + 1 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 5 - 3\sqrt{2}$



3322.- En la figura, els tres quadrats són iguals. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

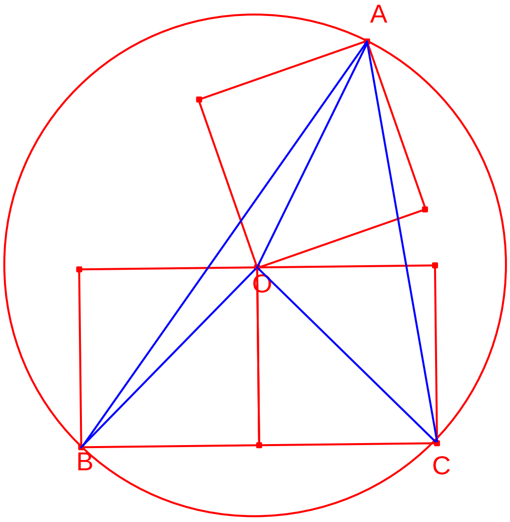
Siga $x = \angle BAC$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

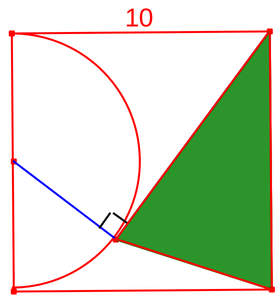
Aleshores, O és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\angle BOC = 90°$

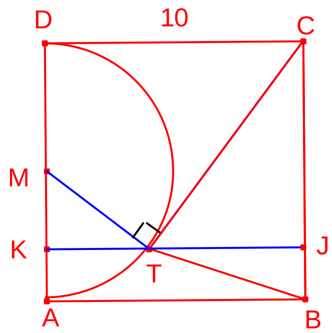
$x = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = 45°$



3323.- En la figura, el quadrat té costat 10
Sobre un costat s'ha dibuixat una semicircumferència.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.

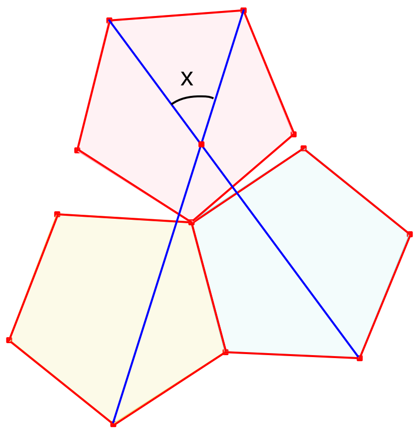


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 10$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ centre de la semicircumferència.
$\overline{MT} = 5$
T és un punt de tangència ja que $\angle MTC = 90°$
$\overline{CT} = \overline{CD} = 10$
La recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per T, talla els costats $\overline{AD}, \overline{BC}$ en els punts K, J, respectivament.

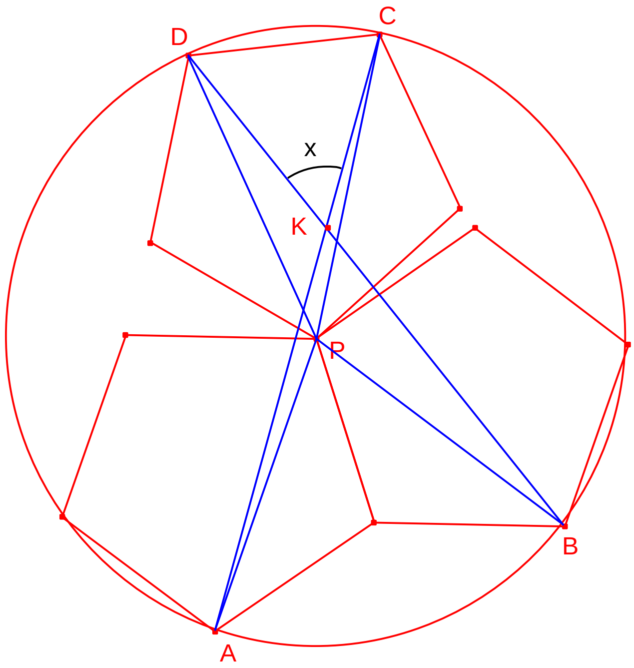


Siga $\overline{TJ} = x$
$\overline{KT} = 10 - x$
$\overline{CJ} = \sqrt{100 - x^2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{TJC}, \overset{\Delta}{MKT}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\sqrt{100 - x^2}}{10 - x} = \frac{10}{5} = 2$$
$$\sqrt{100 - x^2} = 2(10 - x)$$
$$(10 + x)(10 - x) = 4(10 - x)^2$$
$$10 + x = 40 - 4x$$
$$x = 8$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CTB}$ és:
$$S_{CTB} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot x = \frac{1}{2}10 \cdot 8 = 40$$

3324.- Els tres pentàgons regulars de la figura són iguals.
Determineu la mesura de l'angle x.



Solució:



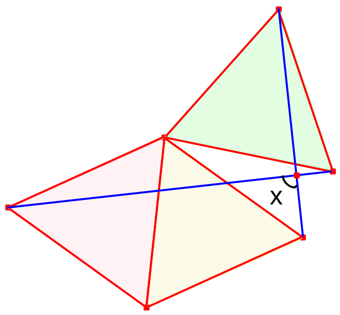
PA=PB=PC=PD

ABCD inscrilptible

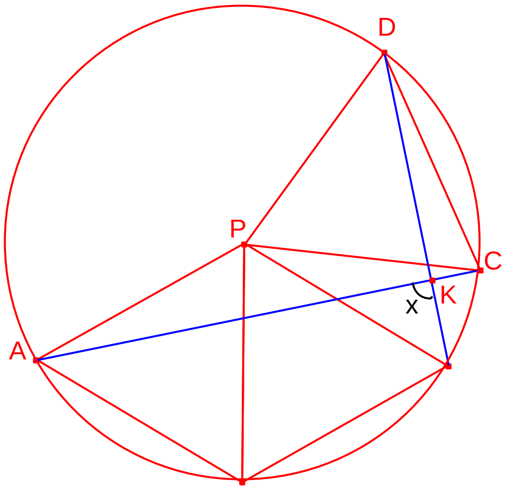
angleCPK=36º
angle APB=72º

x=angle CKD=(36º+72º)/2=54º

3325.- Els tres triangles equilàters de la figura són iguals.
Determineu la mesura de l'angle x.

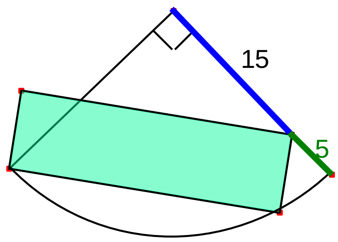


Solució:

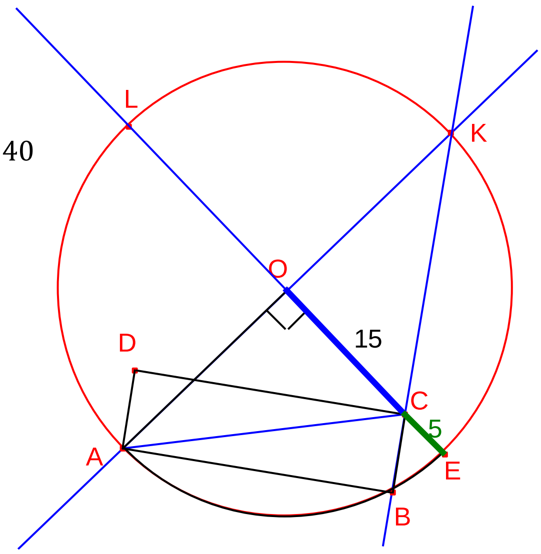


Siga $x = \angle CKD$
$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD}$
Aleshores, el quadrilàter ABCD és inscriptible
$\angle DPD = 60°, \angle APD = 120°$
$x = \angle CKD$ és interior de la circumferència, aleshores:
$x = \angle CKD = \frac{1}{2}(60° + 120°) = 90$

3326.- Sobre un quadrant de radi 20 s'ha dibuixat un rectangle.
Calculeu l'àrea del rectangle.

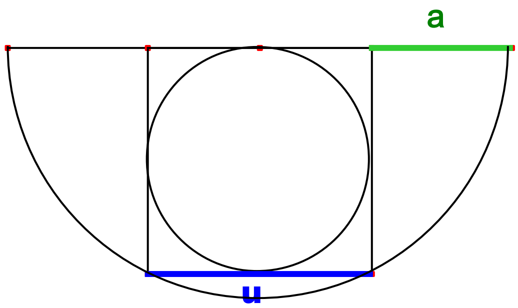


Solució:
Siga el quadrant $\widehat{AE} = 90°$ de centre O i radi $\overline{OA} = 20$
Siga el quadrat $ABCD$, $\overline{OC} = 20, \acute{C}E = 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOC}$:
$\overline{AC} = 25$

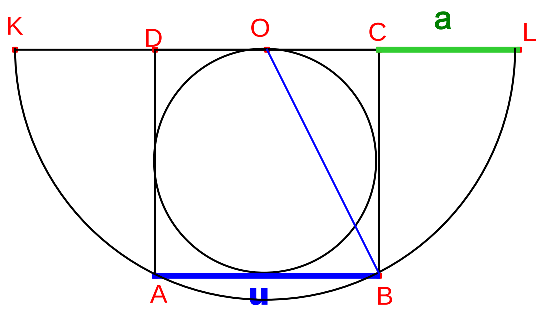


Considerem la circumferència de centre O i radi 20.
La recta BC talla la circumferència en el punt K tal que $\overline{AK} = 40$ és un diàmetre.
$\overline{CK} = \overline{AC} = 25$
Siga $x = \overline{BC}$
Aplicant la potència del punt C respecte de la circumferència:
$\overline{BC} \cdot \overline{KC} = \overline{EC} \cdot \overline{LC}$
$25x = 5 \cdot 35$
$x = 7$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 7 \cdot 24 = 168$

3327.- En la figura, calculeu la proporció: $\frac{u}{a}$



Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OL} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ de cpostat $\overline{AB} = u$



$\overline{OC} = \frac{1}{2}u, \overline{CL} = a$

$\overline{OL} = \frac{1}{2}u + a = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCB}$:

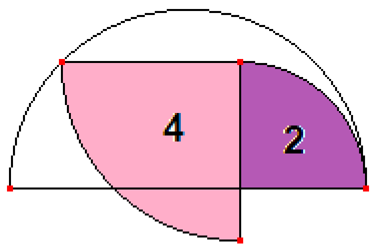
$u^2 + \frac{1}{4}u^2 = 1$

$u = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

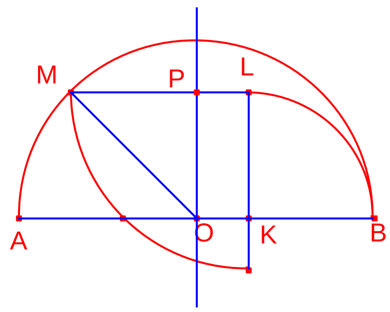
$a = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$

$\frac{u}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

3328.- En la figura, les àrees dels quadrant són 2 i 4, respectivament.
Calculeu l'àrea del semicercle.



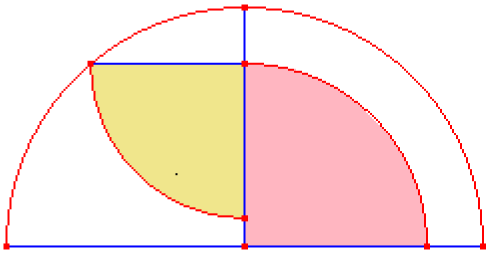
Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KB} = \overline{KL} = r$
$\frac{1}{4}\pi r^2 = 2$
Siga el quadrant de centre P i àrea 4.
El radi és $\overline{LM} = r\sqrt{2}$



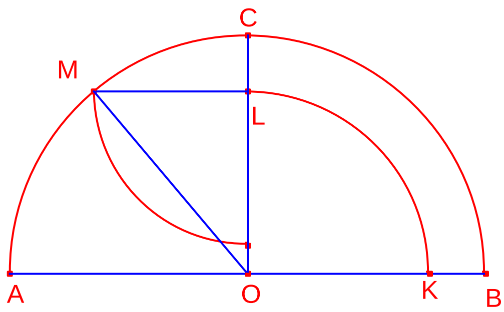
$\overline{OM} = R, \overline{OK} = R - r, \overline{OP} = r, \overline{PM} = (1 + \sqrt{2})r - R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:
$R^2 = r^2 + \left((1 + \sqrt{2})r - R\right)^2$
Simplificant:
$R = r\sqrt{2}$

3329.- La figura està formada per quatre quadrants.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



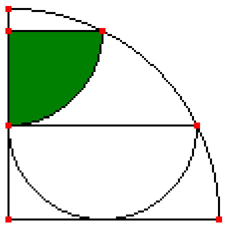
Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OM} = R$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KB} = \overline{KL} = r$
Siga el quadrant de centre L i radi $\overline{LM} = s$



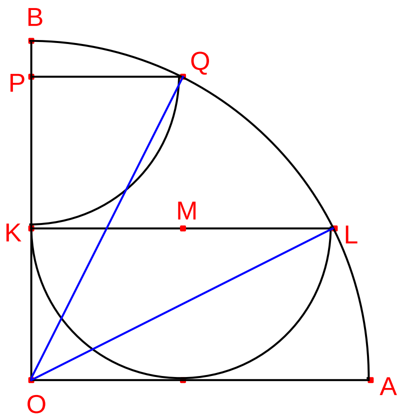
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:
$R^2 = r^2 + s^2$

La proporció de àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{1}{4}\pi(r^2 + s^2)}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

3330.- En l'interior d'un quadrant s'han dibuixat un semicercle i un quadrant.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrant ombrejat i l'àrea del quadrant exterior.



Solució:
Siga el quadrant exterior de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MK} = \overline{ML} = r$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PQ} = s$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$:
$R^2 = r^2 + 4r^2$
$R^2 = 5r^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$R^2 = s^2 + (r + s)^2$
Simplificant:
$R^2 = 2s^2 + r^2 + 2rs$
$5s^2 + \sqrt{5}Rs - 2R^2 = 0$
Resolent l'equació:
$$s = \frac{\sqrt{5}}{5}R$$
Notem que:
$$r = s = \frac{\sqrt{5}}{5}R$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \left(\frac{s}{R}\right)^2 = \frac{1}{5}$$