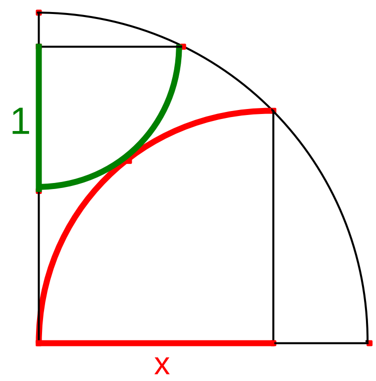
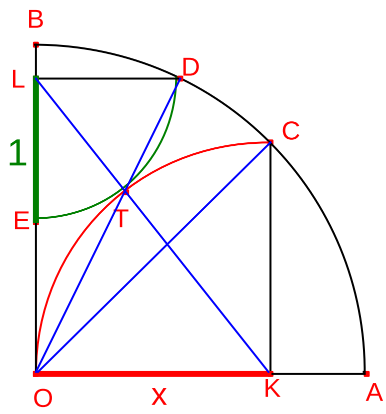
3331.- La figura està formada per tres quadrants, dos d'ells són tangents de radis $1, x$, respectivament.

Calculeu la mesura del radi x.

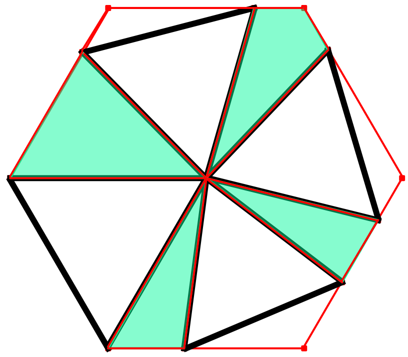


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$
Siga el quadrant de centre K i radi $\overline{KO} = \overline{KC} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OKC}$:
$\overline{OC} = x\sqrt{2}$

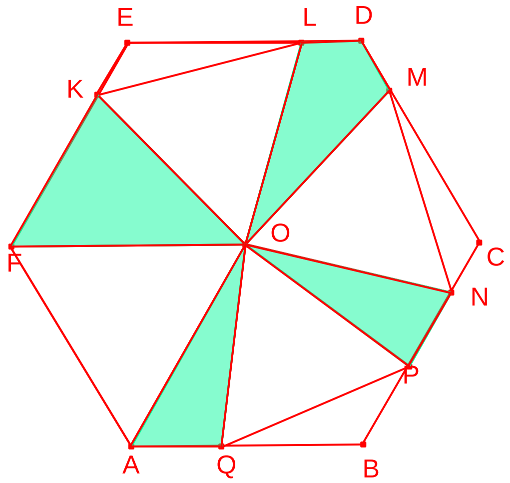
Siga el quadrant de centre L i radi $\overline{LD} = \overline{LE} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKL}, \overset{\Delta}{OLD}$:
$\overline{OL}^2 = (1+x)^2 - x^2 = 2x^2 - 1$
Simplificant:
$x^2 - x - 1 = 0$
$x = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



3332.- Dins d'un hexàgon regular s'han dibuixat quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.

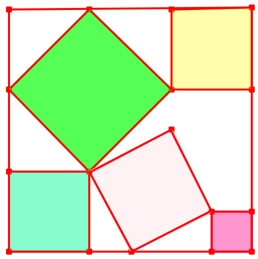


Solució:

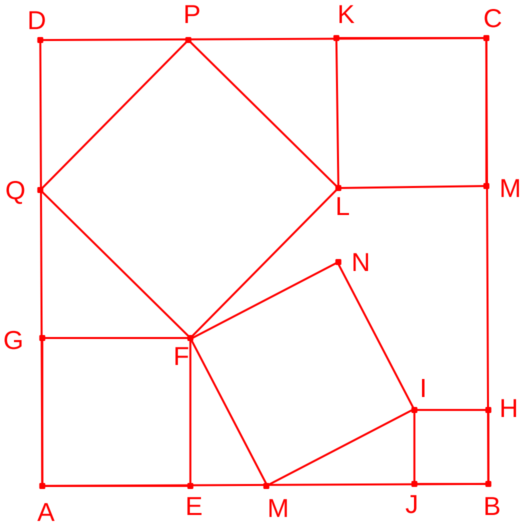


Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
La intersecció dels quatre triangles equilàters és el centre O de l'hexàgon regular.
Siga el quadrilàter $OLEK$, $\overline{OL} = \overline{OK} = \overline{KL} = a, \overline{KE} = b, \overline{EL} = d$
El quadrilàter $OLEK$ és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$ab + ad = ca$
Simplificant:
$b + d = c$
Aleshores, $\overline{DL} = \overline{EK} = b$
$S_{OLEK} = S_{ODE} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}$
Anàlogament:
$S_{OMCN} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}, S_{OPBQ} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}$
$S_{ombrejada} = S_{ABCDEF} - 4 \cdot \frac{1}{6} S_{ABCDEF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF}$

3333.- Calculeu la proporció entre la suma les àrees dels cinc quadrats ombrejats i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siga el quadrat exterior $ABCD$.
Siga el quadrat $AEFG$ de costat $\overline{AE} = a$
Siga el quadrat $BHIJ$ de costat $\overline{BH} = b$
Siga el quadrat $CKLM$ de costat $\overline{CK} = c$
Siga el quadrat $FMIN$ de costat $\overline{FM} = d$
Siga el quadrat $FLPQ$ de costat $\overline{FL} = e$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FEM}, \overset{\Delta}{MJI}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{EM} = b, \overline{MJ} = a$
$\overline{AB} = 2a + 2b$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LKP}, \overset{\Delta}{PDQ}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PD} = c$

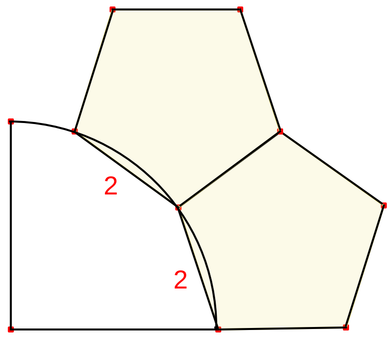
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}, \overset{\Delta}{QGF}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PD} = a$

Aleshores, Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}, \overset{\Delta}{QGF}, \overset{\Delta}{LKP}$ són iguals.
$a = c$
$\overline{AD} = 3a$
$3a = 2a + 2b$
$a = 2b$

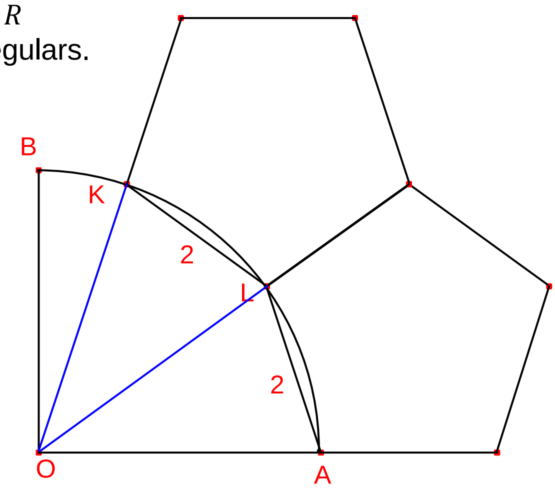
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FEM}$:
$d^2 = a^2 + b^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LKP}$:
$e^2 = a^2 + c^2$
L'àrea ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 4b^2 + b^2 + 4b^2 + (4b^2 + b^2) + (4b^2 + 4b^2) =$$
$$= 22b^2$$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 9a^2 = 36b^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{22b^2}{36b^2} = \frac{11}{18}$$

3334.- Dos pentàgons regulars iguals de costat 2 tenen en comú un costat.
Calculeu l'àrea del quadrant.



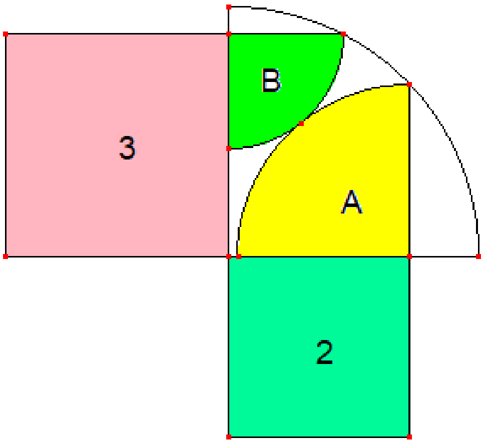
Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = R$
Siguen $\overline{AL} = \overline{KL} = 2$ costats dels pentàgons regulars.
$\angle ALK = 360° - 2 \cdot 108° = 144°$
$\angle OKL = \angle OLK = \frac{1}{2} 144° = 72°$
$R = \overline{OL} = \Phi \cdot \overline{LK} = \Phi$



L'àrea del quadrant és:
$$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 4\Phi^2 = \pi\Phi^2 = \pi \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 8.2248$$

3335.- La figura està formada per tres quadrants i dos quadrats d'àrees 2 i 3,
Calculeu la proporció d'àrees:

$$\frac{A}{B}$$



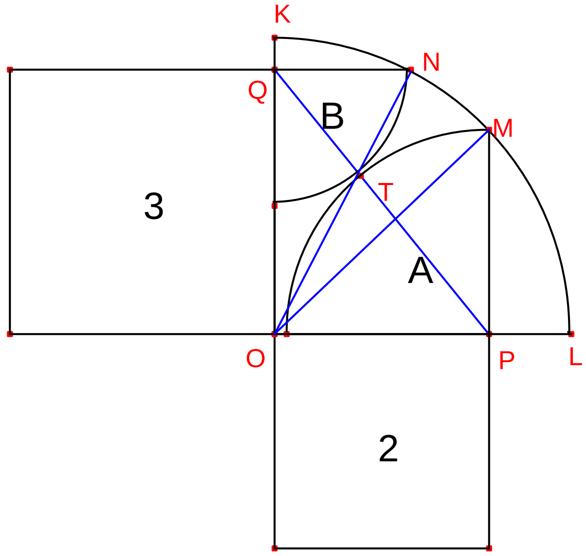
Solució:

Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OK} = R$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = r$ i àrea A.
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QN} = \overline{QT} = s$ i àrea B.

$$A = \frac{\pi}{2}r^2, B = \frac{\pi}{4}s^2, \frac{A}{B} = \left(\frac{r}{s}\right)^2$$

$\overline{OP} = \sqrt{2}, \overline{OQ} = \sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$r + s = \sqrt{5}$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPM}, \overset{\Delta}{OQN}$

$R^2 = r^2 + 2 = s^2 + 3$

$r^2 - s^2 = 1$

$(r + s)(r - s) = 1$

$$r - s = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} r + s = \sqrt{5} \\ r - s = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

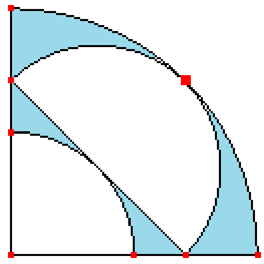
$$\begin{cases} r = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ s = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\frac{r}{s} = \frac{3}{2}$$

La proporció d'àrees és:

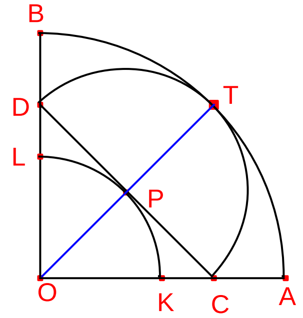
$$\frac{A}{B} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

3336.- La figura està formada per dos quadrants i un semicercle.
El semicercle és tangent al quadrant gran en el punt mig de l'arc.
El quadrant menut és tangent al diàmetre del semicercle
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant gran.

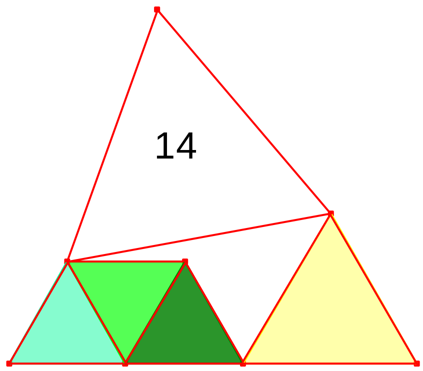


Solució:
Siga O el centre del quadrant gran de radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$
$\angle TOA = 45°$
Siga el quadrant de menut de centre O i radi $\overline{OK} = r$
Siga P el centre del semicercle de diàmetre $\overline{CD}$
P és el punt de tangència del quadrant menut i el diàmetre $\overline{CD}$
$\overline{OP} = \overline{PC} = \overline{PT} = r$
$R = 2r$
La proporció d'àrees és:

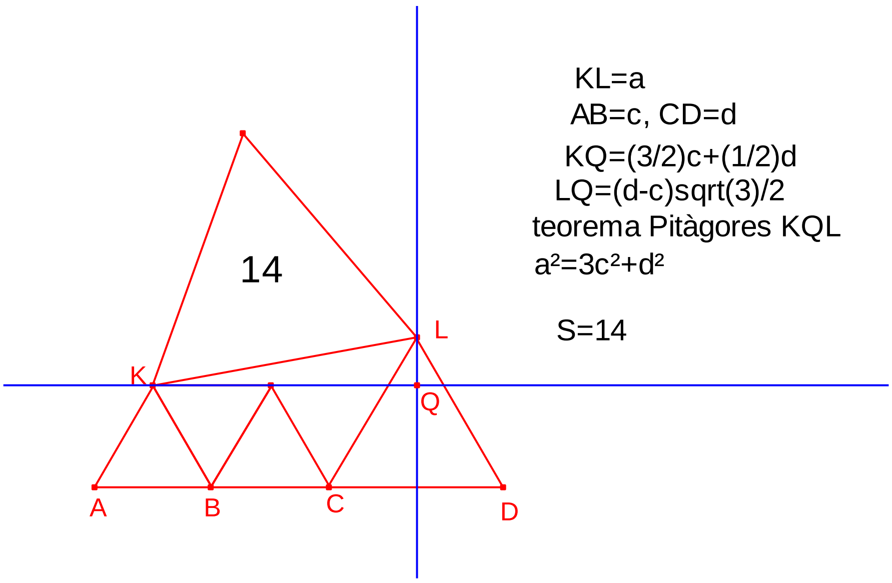
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2 - \left(\frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2\right)}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{r^2 - \frac{3}{4}r^2}{r^2} = \frac{1}{4}$$



3337.- El més gran dels triangles equilàters té àrea 14. Calculeu l’àrea total dels altres quatre triangles equilàters.



Solució:



$KL=a$

$AB=c$, $CD=d$

$KQ=(3/2)c+(1/2)d$

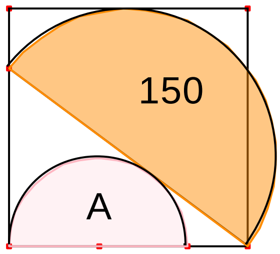
$LQ=(d-c)\mathrm{sqrt}(3)/2$

teorema Pitàgores KQL

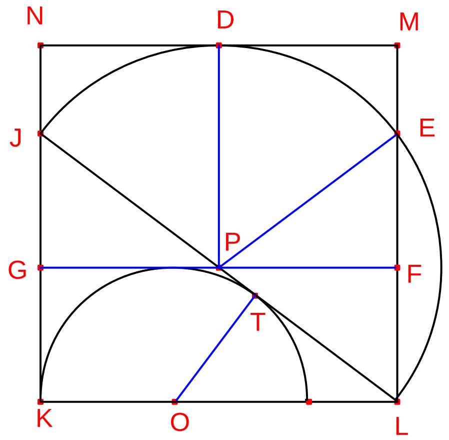
$a^2=3c^2+d^2$

$S=14$

3338.- La figura està formada per dos semicercles i un quadrat.
Si el semicercle gran té àrea 150, calculeu l'àrea del semicercle menut.



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga el semicercle gran de centre P i radi $\overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PL} = R$
$\frac{\pi}{2}R^2 = 150$
Siga el semicercle menut de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OK} = r$
Siga F el punt mig del segment $\overline{LE}$

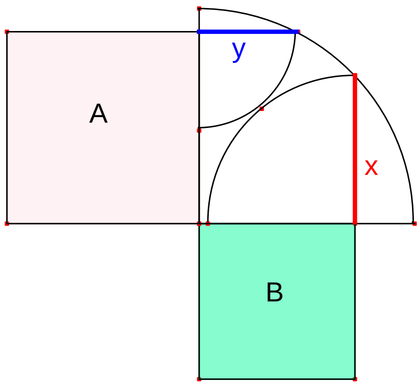


$\overline{LF} = \overline{LE} = c - R$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LTO}, \overset{\Delta}{OTL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{c-R} = \frac{c-r}{R} = 1$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LFP}, \overset{\Delta}{JGP}$ són iguals, aleshores:
$$\overline{PF} = \frac{1}{2}c$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LFP}$:
$$\sqrt{R^2 - (c-R)^2} = \frac{1}{2}c$$
Simplificant:
$$8R = 5c$$
$$r = c - R = \frac{3}{5}R$$
L'àrea del semicercle menut és:
$$S = \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\pi}{2}R^2 \cdot \frac{9}{25} = 150 \cdot \frac{9}{25} = 54$$

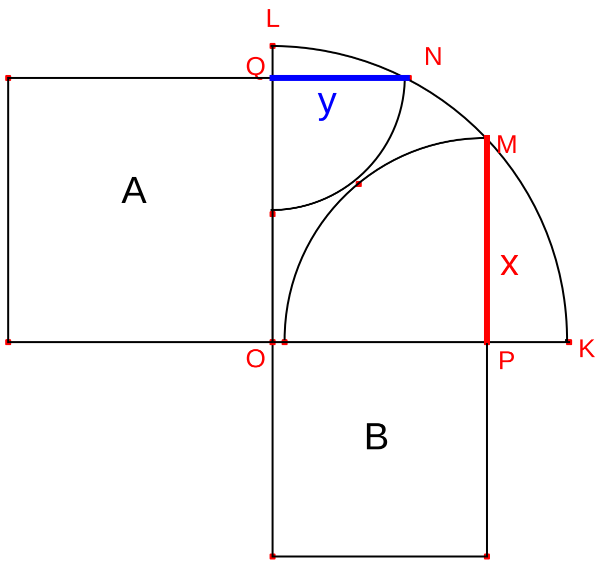
3339.- La figura està formada per tres quadrants i dos quadrats d'àrees 2 i 3,
Proveu que:
$\frac{A}{B} = \frac{x}{y}$



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OK} = R$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = x$.
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QN} = \overline{QT} = y$.

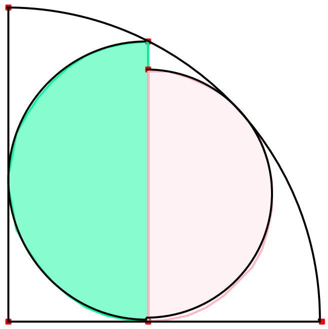
$\overline{OP} = \sqrt{B}, \overline{OQ} = \sqrt{A}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$
$(x+y)^2 = A + B$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPM}, \overset{\Delta}{OQN}$
$R^2 = x^2 + B = y^2 + A$
$x^2 - y^2 = A - B$
$(x+y)(x-y) = A - B$
$x - y = \frac{A-B}{\sqrt{A+B}}$
Considerem el sistema:
$\begin{cases} x + y = \sqrt{A+B} \\ x - y = \frac{A-B}{\sqrt{A+B}} \end{cases}$
$\begin{cases} x = \frac{A}{\sqrt{A+B}} \\ y = \frac{B}{\sqrt{A+B}} \end{cases}$
Dividint ambdues expressions:
$\frac{x}{y} = \frac{A}{B}$



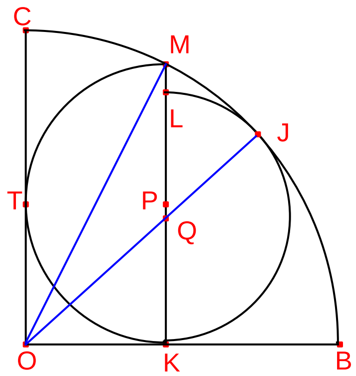
3340.- La figura esta formada per dos semicercles tangents a un quadrant.

Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos semicercles i l'àrea del quadrant.



Solució:

Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OB} = R$
Siga el semicercle de centre P i diàmetre $\overline{KM} = 2r$
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QK} = \overline{QJ} = s$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKM}$:
$R^2 = 5r^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKQ}$:
$(R - s)^2 = r^2 + s^2$
$s = \dfrac{R^2 - r^2}{2R}$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{2}(r^2 + s^2)}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{2\left(r^2 + \left(\frac{R^2 - r^2}{2R}\right)^2\right)}{R^2} = \frac{2\left(r^2 + \frac{R^4 + r^4 - 2R^2r^2}{4R^2}\right)}{R^2} =$$

$$= \frac{2\left(r^2 + \frac{25r^4 + r^4 - 10r^4}{20r^2}\right)}{5r^2} = \frac{18}{25}$$