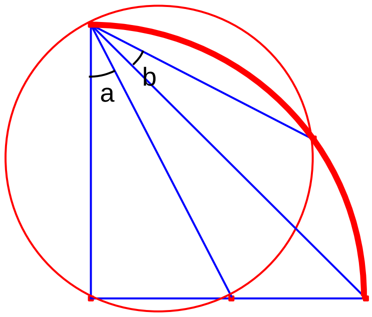
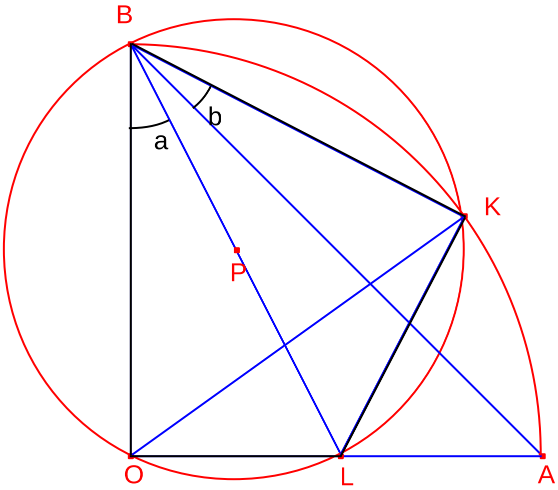
3341.- En la figura, calculeu la suma dels angles $a + b$

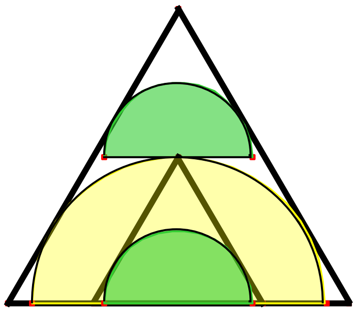


Solució:



Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA}$
Siguen $\angle OBL = a, \angle ABK = b$
Siga la circumferència que passa pels punts O, L, K, B.
El seu centre és el punt mig P del segment $\overline{BL}$.
$\angle OBA = 45°$
$\overline{OB} = \overline{OK}$, aleshores:
$\angle OKB = \angle OBK = b + 45°$
$\angle OKL = \angle OBL = a$
$\angle LKB = 90° = a + b + 45°$
Aleshores:
$a + b = 45°$

3342.- La figura està formada per dos triangles equilàters i tres semicercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la sona verda i la zona groga.



Solució:

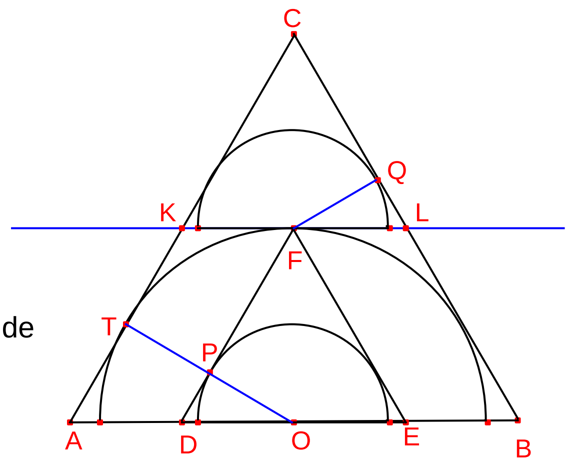
Siga el triangle equilàter exterior $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el triangle equilàter interior $\overset{\Delta}{DEF}$

Siga el semicercle gran de centre el punt mig O del costat $\overline{AB}$ i radi $\overline{OT} = R$.

Siga el semicercle inferior de centre el punt mig O del costat $\overline{AB}$ i radi $\overline{OP} = r$.

Siga el semicercle inferior de centre el punt mig F i radi $\overline{FQ} = s$.



$R = \overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$

$R = \overline{OF} = \overline{FC}$

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r}{R} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{1}{2}$

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KLC}$ són semblants i de raó $2 : 1$

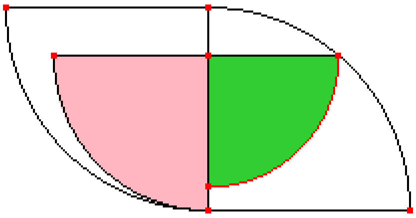
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{s}{R} = \frac{1}{2}$

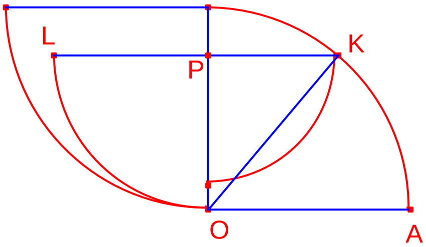
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{groga}} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

3343.- La figura està formada per quatre quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total.



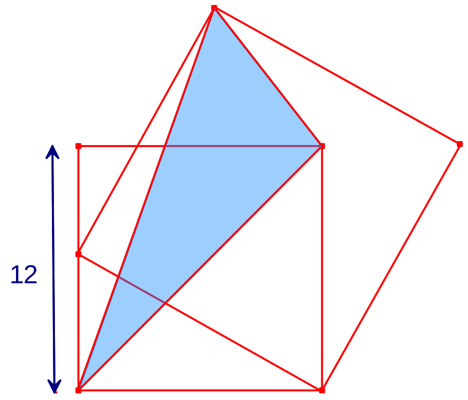
Solució:



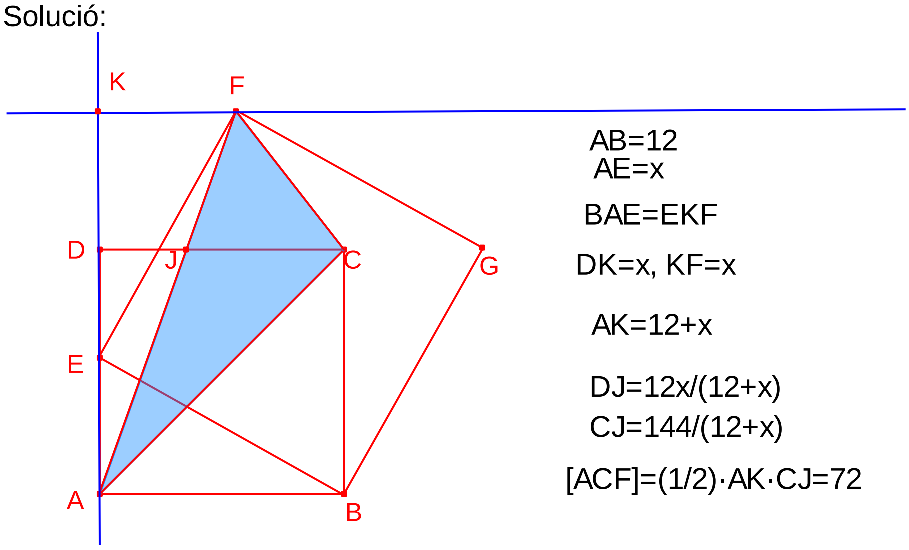
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PK} = r$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PL} = \overline{PO} = s$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPK}$:
$R^2 = r^2 + s^2$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{total}} = \frac{\frac{\pi}{4}(r^2 + s^2)}{\frac{\pi}{2}R^2} = \frac{1}{2}$$

3344.- La figura està formada per dos quadrats amb un vèrtex comú.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



AB=12
AE=x

BAE=EKF

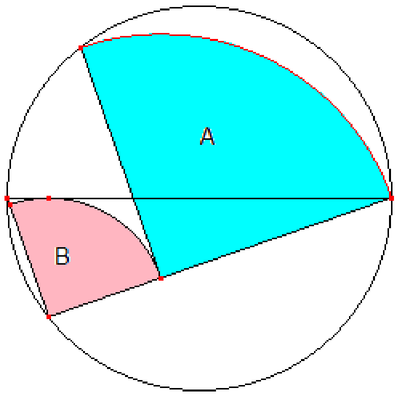
DK=x, KF=x

AK=12+x

DJ=12x/(12+x)
CJ=144/(12+x)

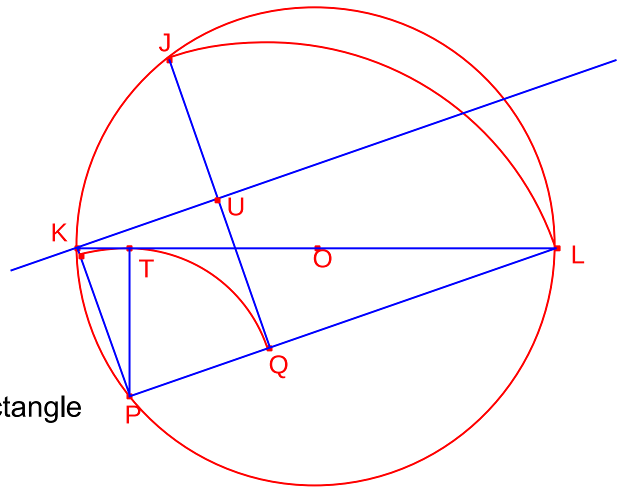
[ACF]=(1/2)·AK·CJ=72

3345.- La figura està formada per dos semicercles i dos quadrants.
L'àrea ombrejada és la meitat de l'àrea del cercle exterior.
Calculeu la proporció d'àrees:
$\frac{A}{B}$



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{OK} = R$
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QL} = \overline{KJ} = r$
Siga el quadrant de centre P i radi $\overline{PQ} = \overline{PT} = s$

Siga U la projecció de K sobre QJ.
$\overline{KU} = s$

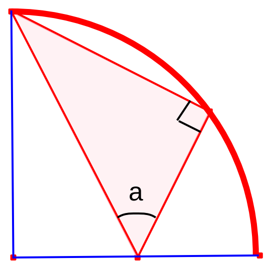


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KJL}$:
$\overline{KJ}^2 = 4R^2 - 2r^2 = 2s^2$
Aleshores:
$\overline{PK} = r - s$
$\overline{KT} = \sqrt{(r-s)^2 - s^2} = \sqrt{r^2 - 2rs}$
$\overline{LT} = \sqrt{(r+s)^2 - s^2} = \sqrt{r^2 + 2rs}$

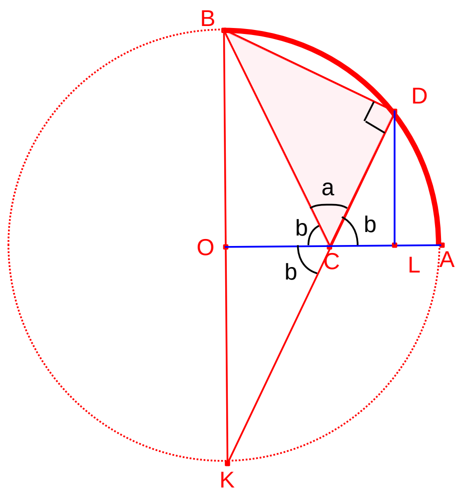
Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPL}$:
$s^2 = \sqrt{r^2 - 2rs} \cdot \sqrt{r^2 + 2rs}$
Simplificant:
$r^2 - 4s^2r^2 - s^4 = 0$
La proporció d'àrees entre els dos quadrants és:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

3346.- Calculeu $\sec a$ a fi que l'àrea del triangle rectangle inscrit en el quadrant siga màxima.



Solució:



OA=OB=1

OC=x

BC=sqrt(1+x²)

a=180º-2b

tan b=1/x, sin b=1/sqrt(1+x²), cos b=x/sqrt(1+x²)

tan a=-2x(x²-1)

sin a=2x/(1+x²), cos a=(1-x²/(1+x²)

BD=x/sqrt(1+x²)

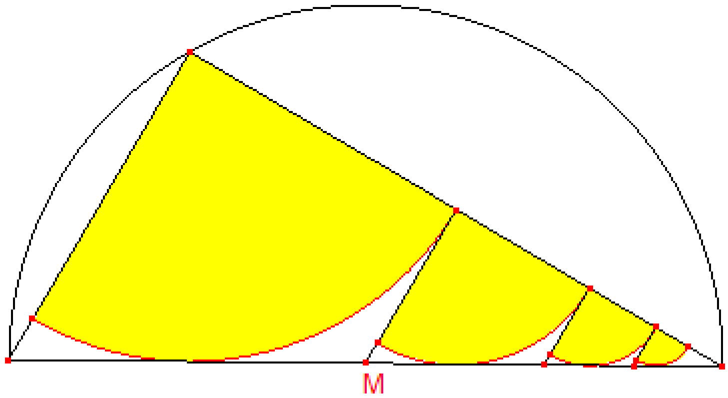
S=[BCD]=(1/2)BC·BD·cos a=(x-x³)/(1+x²)

S'=(-x^4-4x²+1)/(1+x²)²

S'=0   x²= -2+sqrt(5)

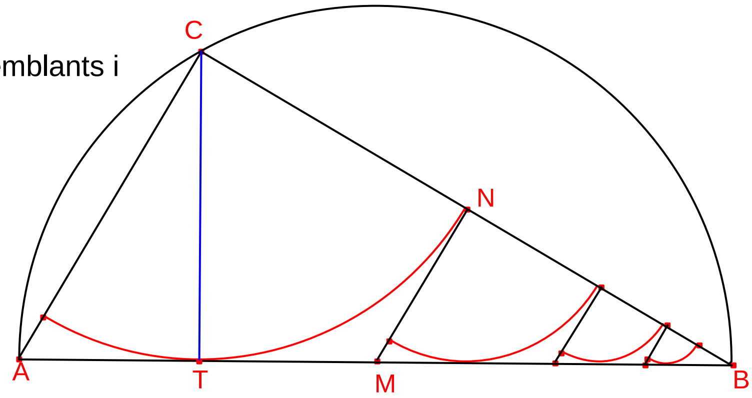
sec a=Phi

3347.- En un semicercle de centre M s'han inscrit infinits quadrants.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels infinits quadrants i l'àrea del semicercle.



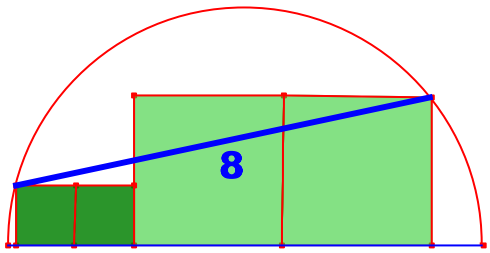
Solució:
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MB} = 1$
$\overline{MN}$ i $\overline{AC}$ són paral·lels.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}C, M\overset{\Delta}{B}N$ són semblants i de raó 2:1

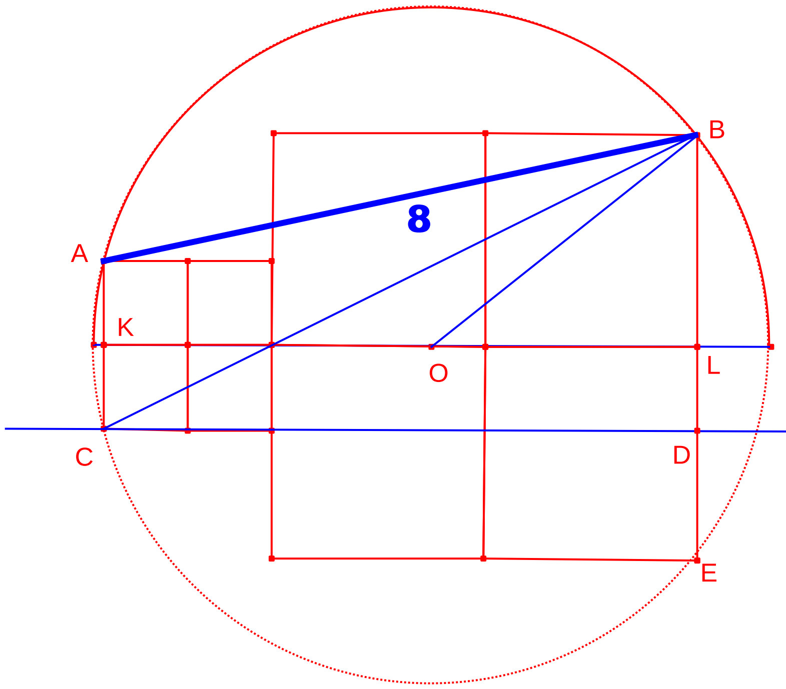


Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CN} = \overline{BN} = R$
$\overline{CT} = R, \overline{BC} = 2R$
Aleshores, $\angle ABC = 30°$
$\overline{AC} = 1$
$2R = \overline{BC} = \sqrt{3}$
$R = \frac{\sqrt{3}}{2}$
L'àrea del primer quadrant de l'esquerra és:
$Q_1 = \frac{\pi}{4}\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{16}$
Les àrees del quadrants formen una progressió geomètrica de raó:
$r = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$0 < r < 1$
La suma de les infinites àrees és:
$S_{infinitaa} = \frac{Q_1}{1 - r}$
$S_{infinita} = \frac{\frac{3\pi}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{4}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{infinita}}{S_{semicercle}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}$

3348.- En la figura hi ha 4 quadrats en l'interior d'un semicercle.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:



OB=R

AK=a, BL=b

CD=2(a+b), BD=a+b

tan(ACB)=2

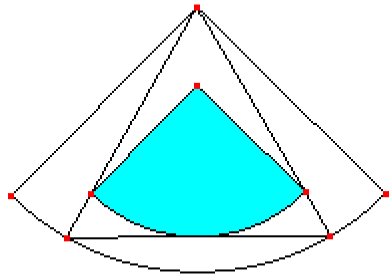
teorema sinus ABC

8/sin(ACB)=2R

R=2·sqrt(5)

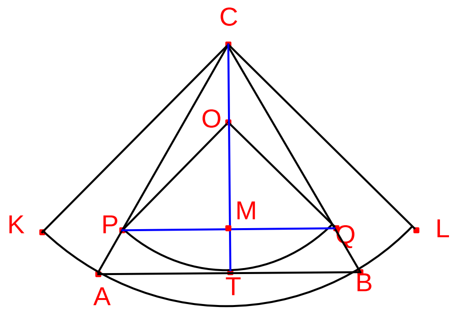
Area=10·PI

3349.- La figura està formada per un triangle equilàter i dos quants.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos quadrants.



Solució:

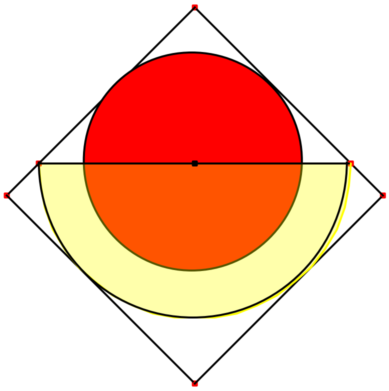
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el quadrant de centre C i radi $\overline{AK} = 2$
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OT} = r$
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$



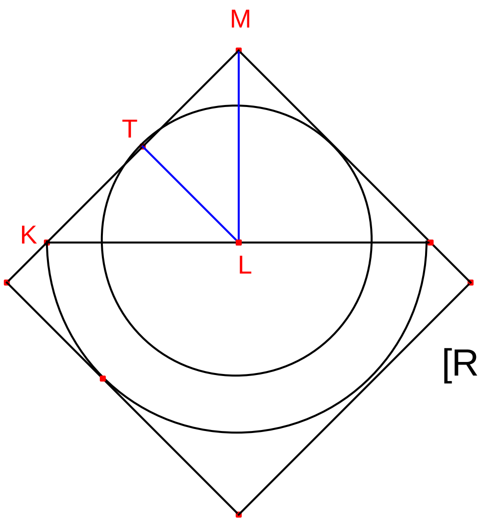
$\overline{PM} = r\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\overline{CP} = 2\overline{PM} = r\sqrt{2}$
$\overline{CT} = \sqrt{3}$
$\overline{CO} = \sqrt{3} - r$
$\angle POC = 135°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{POC}$:
$2r^2 = r^2 + \left(\sqrt{3} - r\right)^2 + r\left(\sqrt{3} - r\right)\sqrt{2}$
Simplificant:
$\sqrt{2}r^2 + \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)r - 3 = 0$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3}{2}$$
La proporció entre les àrees dels dos quadrant és:
$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6} + 3}{4}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6} + 9}{8} \approx 0.3256303134$$

3350.- La figura està formada per un quadrat un cercle i un semicercle.
Calcula la proporció entre l’àrea roja i l’àrea groga.



Solució:



KL=R, LT=r

LM=r·sqrt(2)

R=r·sqrt(2)

[Roja]/[Groga]=$r^2/((R^2-r^2)/2)=2$