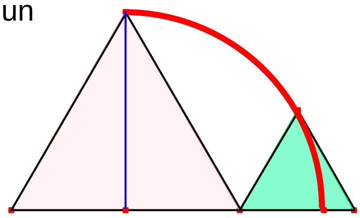
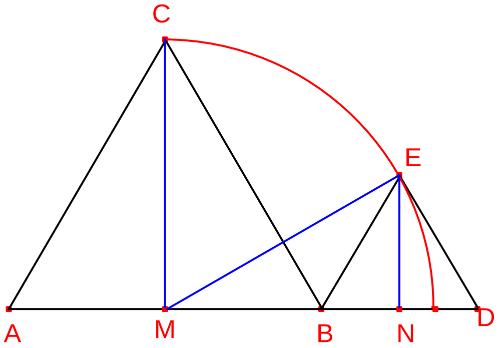
3361.- La figura està formada per dos triangles equilàters y un quadrant.
L'àrea del triangle equilàter és 1.
Calculeu l'àrea del triangle equilàter menut.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$ i àrea 1.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{BM} = \frac{1}{2}c$



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDE}$ de costat $\overline{BD} = d$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{BD}$

$\overline{EN} = \frac{\sqrt{3}}{2}d, \overline{BN} = \frac{1}{2}d$

$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \overline{MN} = \frac{1}{2}(c+d)$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangles $\overset{\Delta}{MNE}$:

$\frac{3}{4}c^2 = \frac{3}{4}d^2 + \frac{1}{4}(c^2 + 2cd + d^2)$

Simplificant:

$2d^2 + cd - c^2 = 0$

Resolent l'equació:

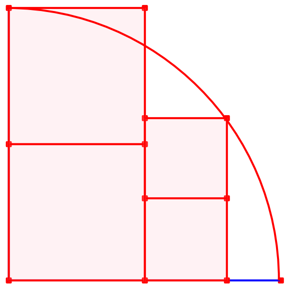
$\frac{d}{c} = \frac{1}{2}$

La proporció d'àrees dels dos triangles és:

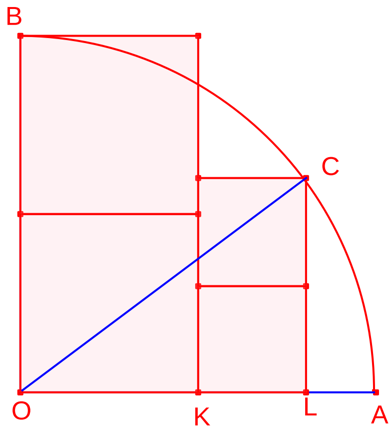
$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{d}{c}\right)^2$

$S_{BDE} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}$

3362.- En un quadrant de radi 5 s'ha dibuixat quatre quadrats.
Calculeu la suma de les àrees dels quatre quadrats



Solució:



OA=OC=5

OK=5/2, KL=c

CL=2c

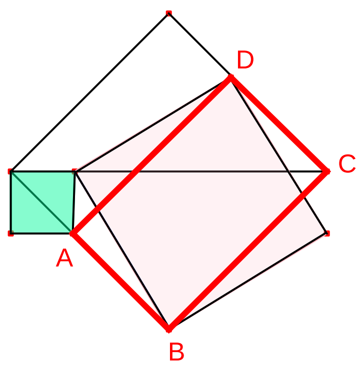
Teorema Pitàgores OLC

$5^2=4c^2+(5/2+c)^2$

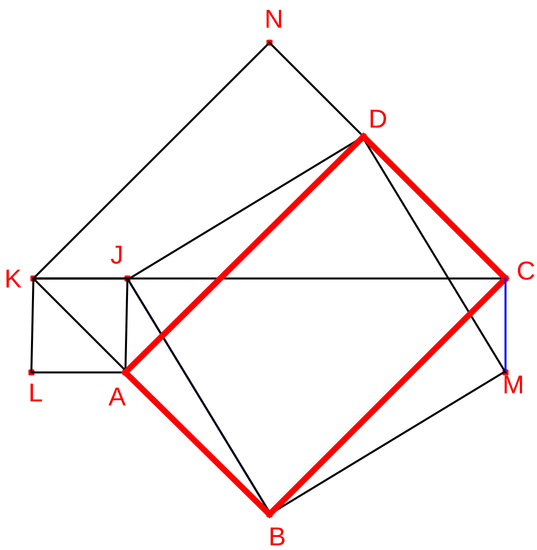
c=3/2

$S=2\cdot(5/2)^2+2\cdot(3/2)^2=17$

3363.- La figura està formada per tres quadrats tals que cada dos tenen un vèrtex comú.
Proveu que el quadrilàter $ABCD$ és un rectangle.



Solució:



Siguen els quadrats $AJKL, BMDJ, BCNK$.

$\overline{BK} = \overline{BC}, \overline{BJ} = \overline{BM}, \angle KBJ = \angle CBM$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KBL}, \overset{\Delta}{CBM}$ són iguals i el primer és transformat del segon amb un gir de centre B i 90º

Aleshores, $\overline{CM} = \overline{KL}$ i són perpendiculars.

$\overline{JD} = \overline{JB}, \overline{JK} = \overline{JA}, \angle KJB = \angle AJD$

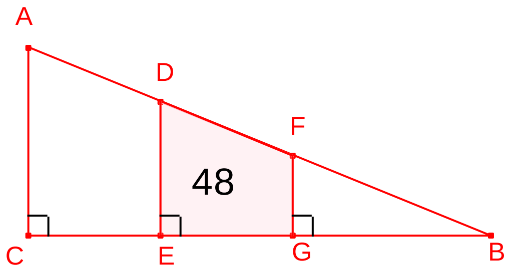
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KJL}, \overset{\Delta}{AJD}$ i el segon és transformat del primer amb un gir de centre J i 90º

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{BK}$ i són perpendiculars.

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{BC}$ i són paral·lels.

Aleshores, $ABCD$ és un paral·lelogram.

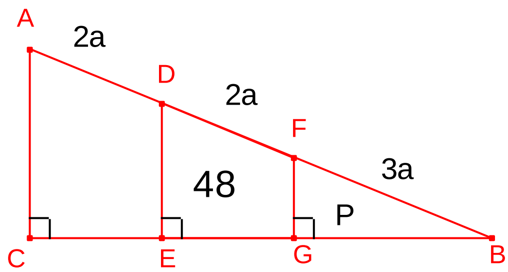
3364.- En la figura, $\overline{AD} : \overline{DF} : \overline{FB} = 2 : 2 : 3$.
L'àrea del quadrilàter $DEGF$ és 48
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:
Siga $\overline{AD} = 2a, \overline{DF} = 2a, \overline{FB} = 3a$
Siga $P = S_{FGB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEB}, \overset{\Delta}{FGB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{P+48}{P} = \left(\frac{5a}{3a}\right)^2$$

$9P + 432 = 25P$
$P = 27$

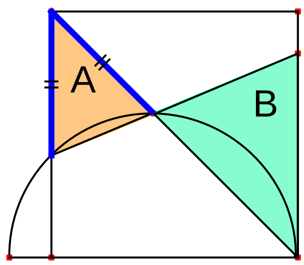


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{FGB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

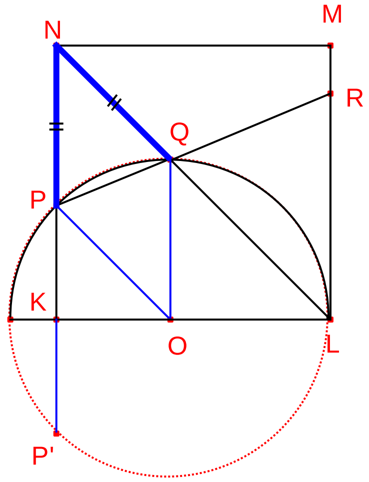
$$\frac{S_{ABC}}{27} = \left(\frac{7a}{3a}\right)^2$$

$S_{ABC} = 147$

3365.- La figura està formada per un semicercle i un quadrat.
Determineu la proporció d'àrees $A{:}B$



Solució.
Sigla la circumferència de centre O.
Siga el quadrat $KLMN$.



Els triangles $\overset{\Delta}{PQN}, \overset{\Delta}{QRL}$ són semblants.
Siga $\overline{NP} = \overline{NQ} = c, \overline{LQ} = \overline{LR} = d$
Siga $\overline{PK} = \overline{P'K} = a$
Aplicant la potència del punt N respecte de la circumferència:
$c(c + 2a) = c(c + d)$
Simplificant:
$2a = d$

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

$$\overline{KL} = a + c = \frac{1}{2}d + c$$

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}d, \overline{OK} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}d + c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KOP}$:

$$\frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{4}d^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}d + c\right)^2$$

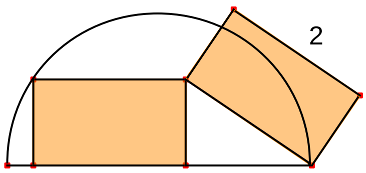
Resolent l'equació.

$$\frac{d}{c} = \sqrt{2}$$

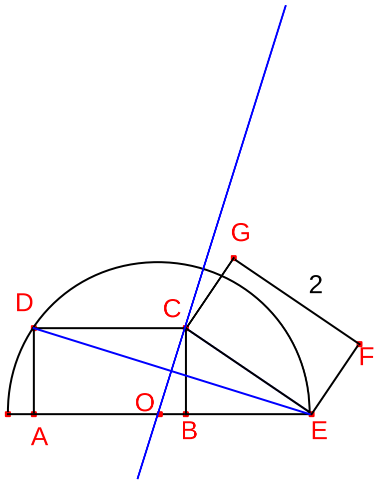
La proporció d'àrees és:

$$\frac{B}{A} = \left(\frac{d}{c}\right)^2 = 2$$

3366.- Els dos rectangles de la figura són iguals i tenen un costat que mesura 2.
Calculeu el radi de semicercle.



Solució:



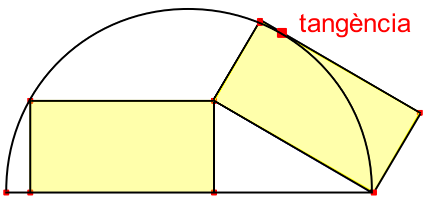
CE=CD=2
OD=OE=R

Recta OC mediatriu del segment DE
a=angleOCD=angleOCE

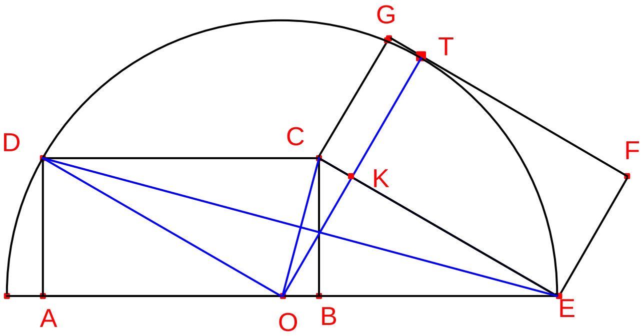
angleOCD=angle COB

R=OE=CE=2

3367.- En la figura, el radi del semicercle és 1. Calculeu la suma de les àrees dels dos rectangles ombrejats.



Solució:



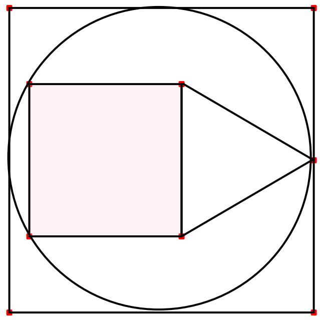
Siguen els rectangles $ABCD, CEFG$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$
Siga T el punt de tangència del costat $\overline{FG}$ i la semicircumferència.
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OE}´ = 1$
$\overline{OT} = 1, \overline{OT} \perp \overline{FG}$

$\overline{CD} = \overline{CE} = a, \overline{OD} = \overline{OE}´ = 1$

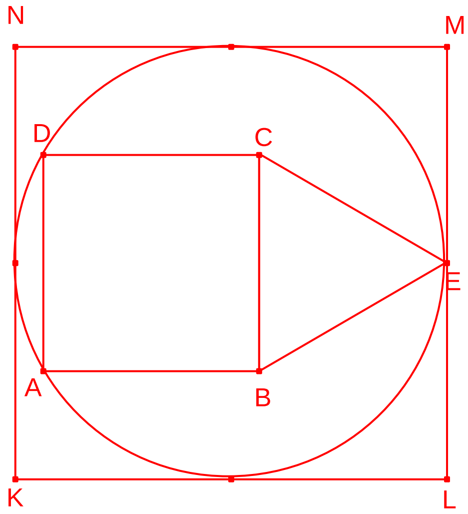
Aleshores, la recta OC és mediatriu del segment $\overline{DE}$
Per tant, $\angle OCD = \angle OCE = \gamma$
$\angle BOC = \angle OCD = \gamma$
Aleshores:
$a = \overline{CE} = \overline{OE} = 1$

Siga K la intersecció del segment $\overline{OT}$ i el costat $\overline{CE}$.
$\overline{OK} = \overline{BC} = b$
$\overline{OT} = 1 = 2b$
Aleshores, $\overline{BC} = \frac{1}{2}$
La suma de les àrees és:
$S_{total} = 2ab = 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

3368.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:



AB=1

KL=2R

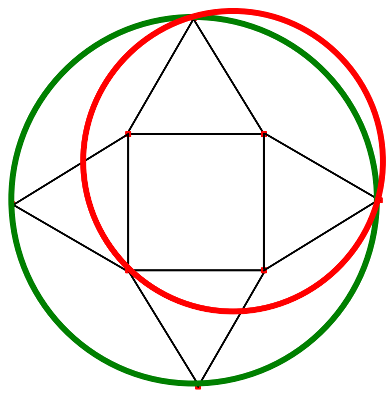
angle AED=30º

teorema Sinus AED:

1/(1/2)=2R

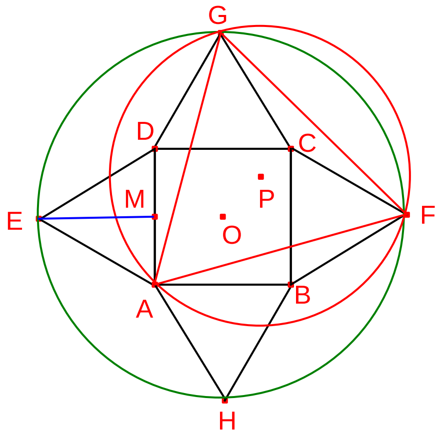
[ABCD]/[KLMN]=1/4

3369.- La figura està formada per un quadrat i quatre triangles equilàters.
Calculeu la proporció entre les àrees de les dues circumferències.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i de costat $\overline{AB} = c$
El centre del quadrat O és el centre de la circumferència circumscrita al quadrat $EHFG$.
Siga $\overline{OE} = R$ el seu radi.

Siga P el centre de la circumferència circumscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{AFG}$
Siga $\overline{PA} = r$ el seu radi.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$

$$\overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$R = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$\angle FCG = 150°$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{FCG}$:

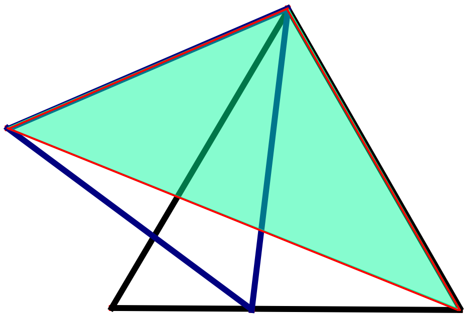
$$\overline{FG}^2 = c^2 + c^2 - 2c \cdot c \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)c^2$$

$$r = \overline{AP} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{FG} = \frac{\sqrt{3}}{3}c\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

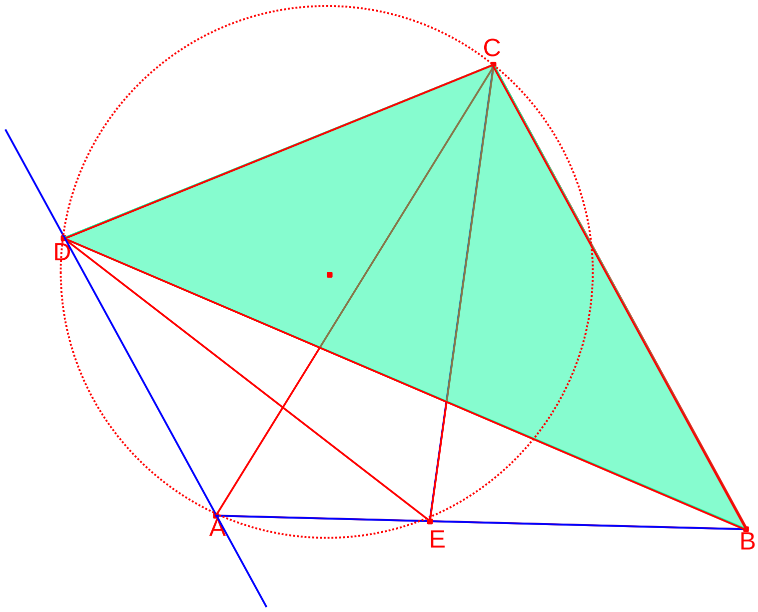
La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_{roig}}{S_{verd}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

3370.- El més gran d’aquests dos triangles equilàters té àrea 8.
Calculeu l’àrea del triangle verd



Solució:



angleABC=60º
angle ACE=a

angle DCA=60º-a

angle AEC=120º-a

angle AED=60º-a

AECD inscriptible

angle DAC=60º

AD//BC

[BCE]=[ABC]=8