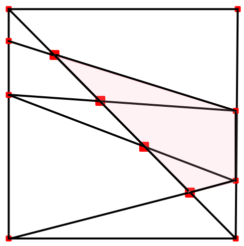
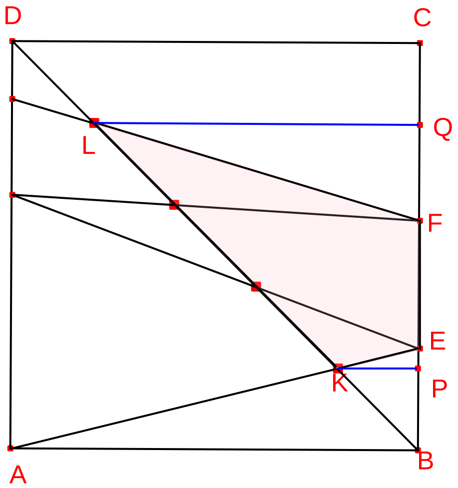
3371.- La diagonal del quadrat de la figura s'ha dividit en cinc parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:



AB=1

BE=1/4

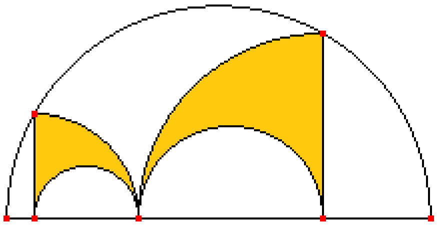
BF=9/16

PK=1/5

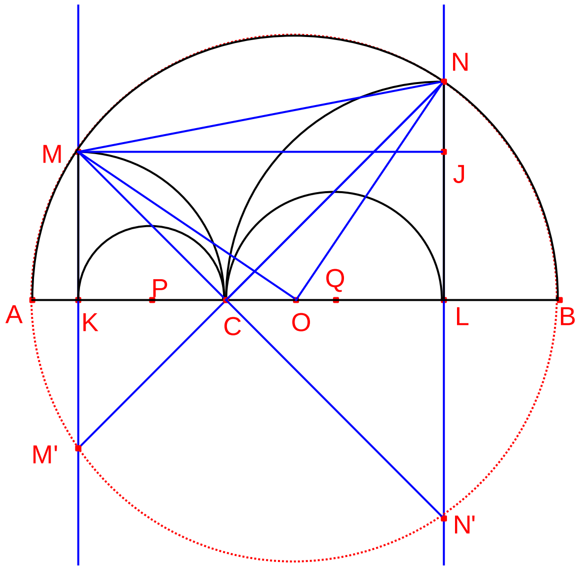
LQ=4/5

[KEFL]=(1/2)·(9/16)·(4/5)-(1/2)·(1/4)·(1/5)=1/5

3372.- La figura està formada per tres semicercles i dos quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle més gran.



Solució:



Siga el semicercle de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga el semicercle de centre P i diàmetre $\overline{KC} = 2a$
Siga el semicercle de centre Q i diàmetre $\overline{CL} = 2b$

Siga M' el simètric de M respecte de $\overline{AB}$
Siga N' el simètric de N respecte de $\overline{AB}$

$\angle MCN = \angle M'CN' = 90°$
$\angle MON = 90°$

Siga J la projecció de M sobre $\overline{LN}$

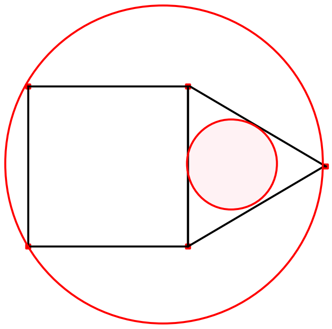
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MJN}$:
$\overline{MN}^2 = 8(a^2 + b^2)$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{MON}$:
$2R^2 = 8(a^2 + b^2)$
$R^2 = 4(a^2 + b^2)$
La proporció d'àrees és:

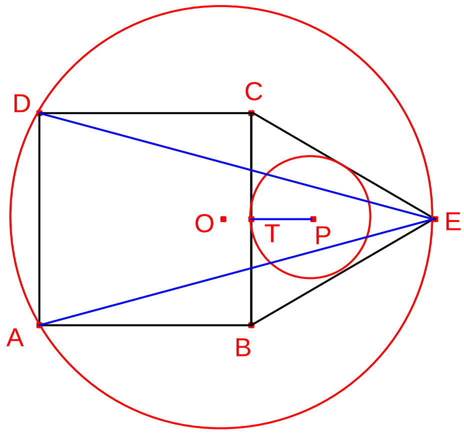
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 4a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{4} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2} \cdot b^2}{\frac{1}{2} \cdot R^2} = \frac{a^2 + b^2}{R^2} = \frac{1}{4}$$

3373.- La figura està formada per un quadrat i un triangle equilàter.

Calculeu la proporció entre l'àrea inscrita I triangle equilàter i la circumscrita a la figura.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCE}$.

Siga la circumferència inscrita al triangle equilàter de centre P i radi $r = \overline{PT}$.

$$r = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Siga la circumferència de centre O circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AED}$ de radi $\overline{OA} = R$

$\angle ABE = 150°$

$$\angle AEB = \frac{180° - 150°}{2} = 15°$$

$\angle AED = 60° - 2 \cdot 15° = 30°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AED}$:

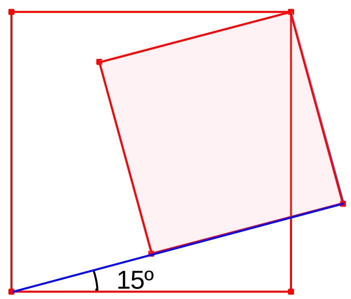
$$\frac{1}{\sin 30°} = 2R$$

$R = 1$

La proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

3374.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = d$

$\angle GAB = 15°$

$\angle CAB = 45°$

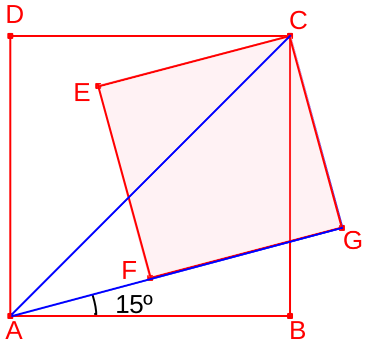
$\angle CAG = 30°$

$\overline{AC} = c\sqrt{2}$

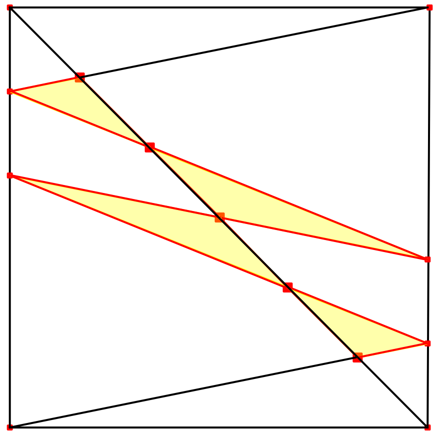
$d = \overline{CG} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

La proporció d'àrees és:

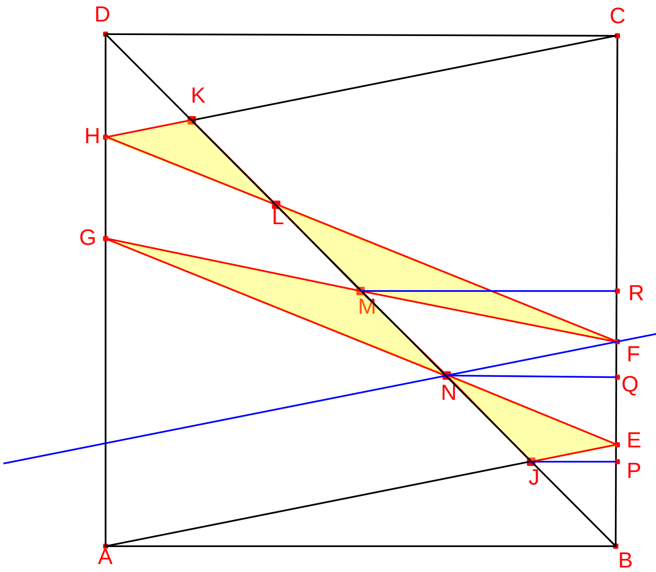
$\frac{S_{CEFG}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{d}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}$



3375.- La diagonal del quadrat de la figura s’ha dividit en sis parts iguals.
Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del quadrat



Solució:



AB=1
BE=1/5
BF=2/5, EF=1/5

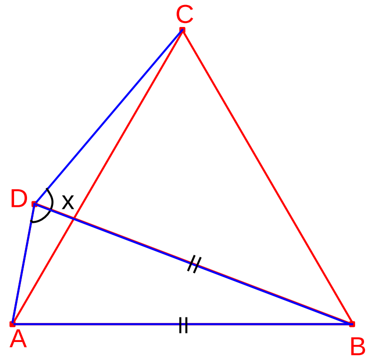
JP=1/6
NQ=1/3
MR=1/2

[JEN]=[BEN]-[BEJ]=1/60

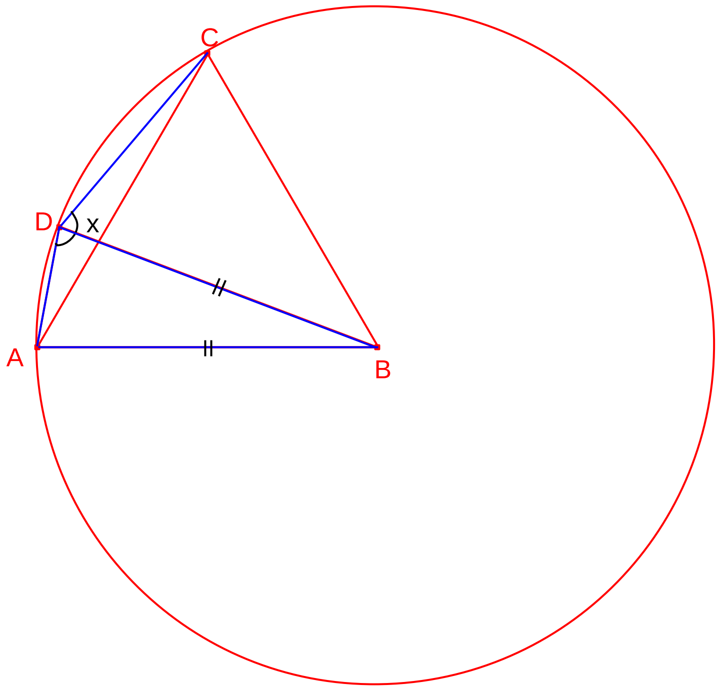
[GNM]=[GEF]-[MBF]+[BEN]=1/30

[GROGA]=2(1/60+1/30)=1/10

3376.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter i el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ADC = x$.

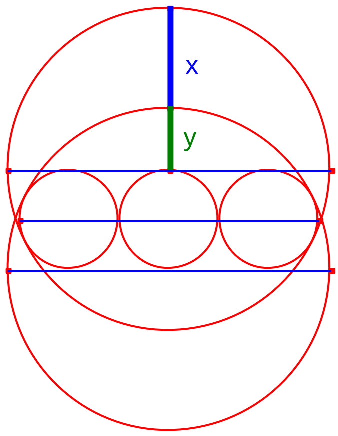


Solució:

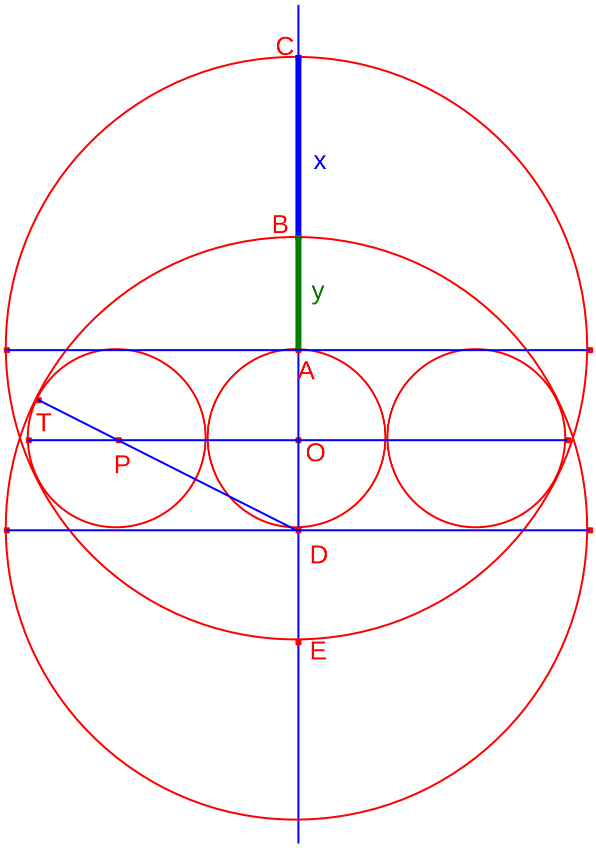


$\overline{BA} = \overline{BD} = \overline{BC}$
Aleshores, D pertany a la circumferència de centre B i radi $\overline{BA}$.
$\angle ADC$ és un angle inscrit en la circumferència que abraça 240º.
Aleshores, $x = \angle ADC = \frac{1}{2}240° = 120°$

3377.- La figura està formada per 10 semicircumferències.
Determineu la proporció $\frac{x}{y}$



Solució:



OA=OD=r
AB=DE=y

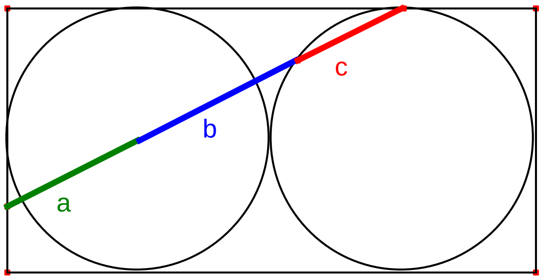
x+y=2r+y
x=2r

Teorema Pitàgores POD

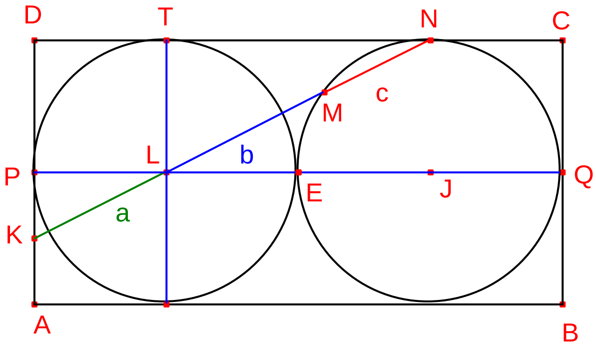
$(y+r)^2=r^2+4r^2$
y=(-1+sqrt(5))r

x/y=(1+sqrt(5))/2=Phi

3378.- La figura està formada per un rectangle que té inscrites dues circumferències.
Calculeu la proporció $a : b : c$



Solució:

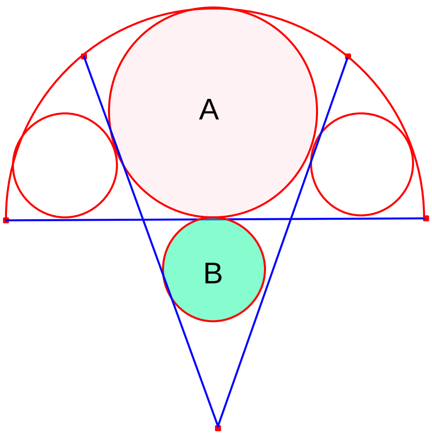


Siga la circumferència de centre L i radi $\overline{LP} = r$
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 4r, \overline{BC} = 2r$
Siguen $\overline{KL} = a, \overline{LM} = b, \overline{MN} = c$

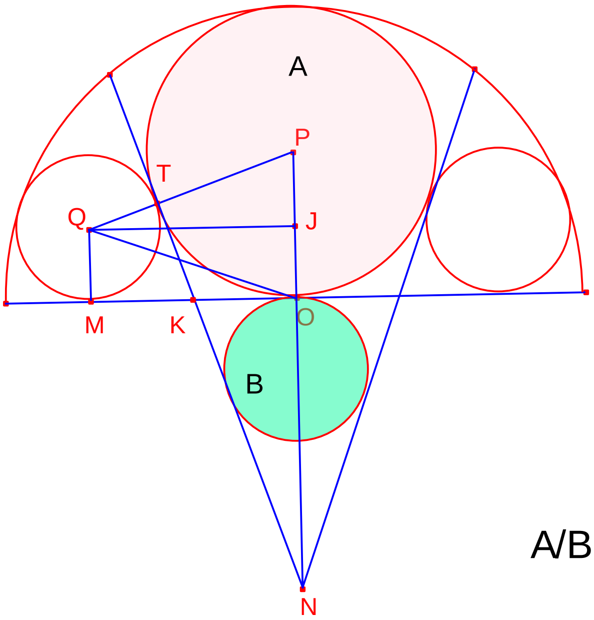
Aplicant la potència del punt L respecte de la circumferència de centre J:
$\overline{LM} \cdot \overline{LN} = \overline{LE} \cdot \overline{LQ}$
$b(b + c) = 3r^2$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LPK}, \overset{\Delta}{NTL}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:
$b + c = 2a, \overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{LT} = \frac{1}{2}r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPK}$:
$a = \frac{\sqrt{5}}{2}r$
$b \cdot 2a = 3r^2$
$b = \frac{3\sqrt{5}}{5}r$
$c = 2a - b = \frac{2\sqrt{5}}{5}r$
Aleshores:
$a : b : c = \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{3\sqrt{5}}{5} : \frac{2\sqrt{5}}{5} = 5 : 6 : 4$

3379.- La figura està formada per un semicercle que té inscrits dos cercles.
Les rectes tangents als cercles i el diàmetre del semicercle formen un triangle.
Determineu la proporció de les àrees

$\frac{A}{B}$



Solució:



PT=r, QT=s

Teorema Pitàgores QJP, QJO

$(r+s)^2-(r-s)^2=(2r-s)^2-s^2$

r=2s

OK=KT=KM=a

Teorema Pitàgores OMQ

$(3s)^2=s^2+(2a)^2$

$a=s\cdot\text{sqrt}(2)$

ON=h

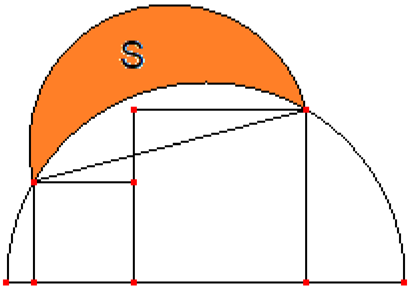
Teorema Tales NTP, NOK

$r/(r+h)=a/\text{sqrt}(a^2+h^2)$

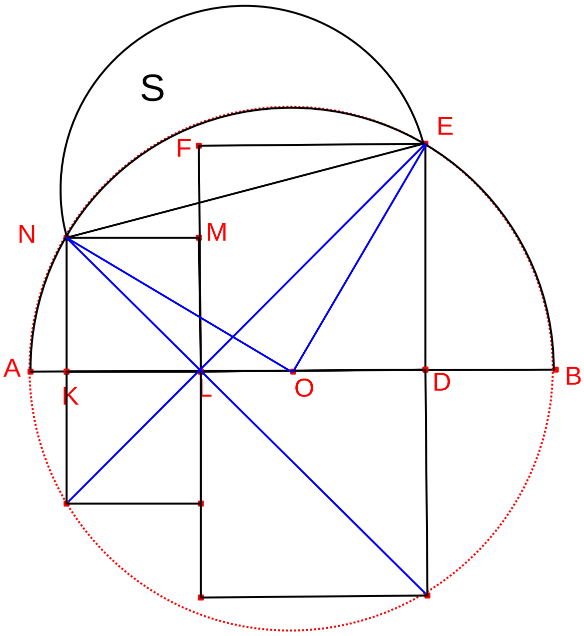
h=4s

$A/B=((2r+h)/h)^2=4$

3380.- En una semicircumferència de radi 2 s'ha inscrit dos quadrats.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
Siguen els quadrats $KLMN, LDEF$.
$\angle NLE = 90°$
Aleshores, $\angle NOE = 90°$
La lúnula té àrea:
$S = S_{NOE} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$