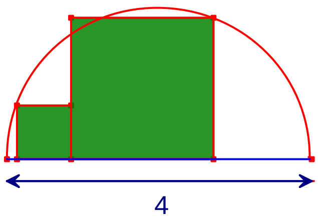
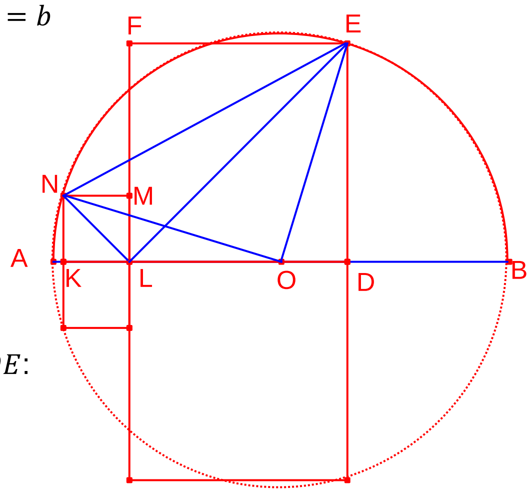
3381.- La figura està formada per un semicercle de diàmetre 4 i dos quadrats.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 2$
Siguen els quadrats $KLMN, LDEF$, de costats $\overline{KL} = a, \overline{LD} = b$
$\angle NLE = 90°$
Aleshores, $\angle NOE = 90°$

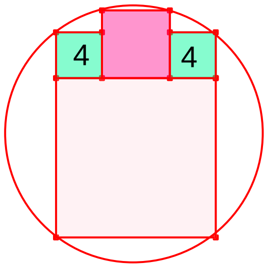


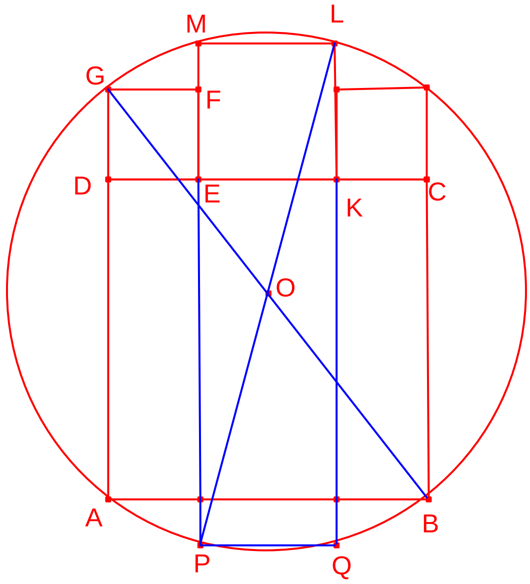
$\overline{NL} = a\sqrt{2}, \overline{LE} = b\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NLE}$:
$\overline{NE}^2 = 2a^2 + 2b^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NOE}$:
$2a^2 + 2b^2 = 2^2 + 2^2$
Simplificant:
$a^2 + b^2 = 4$

La suma de les àrees dels dos quadrats és:
$S_{ombrejada} = a^2 + b^2 = 4$

3382.- La figura està formada per quatre quadrats dos d'ells d'àrea 4.
Calculeu l'àrea del cercle circumscrit.





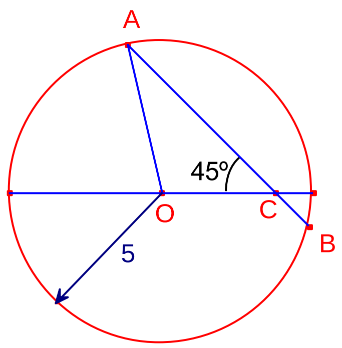
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ inferior de costat $\overline{AB} = a$
Siga el quadrat $DEFG$ d'àrea 4 i costat $\overline{DE} = 2$
Siga el quadrat $DKLM$ de costat $\overline{EK} = a - 4$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$ que passa pels punts A, B, J, L, M, G.
$FM = a - 4 - 2 = a - 6$
La recta EF talla la circumferència en el punt P
$\overline{MP} = a + 2 + 2 \cdot \overline{MF} = 3a - 10$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABG}$:
$4R^2 = a^2 + (a + 2)^2$
$4R^2 = 2a^2 + 4a + 4$

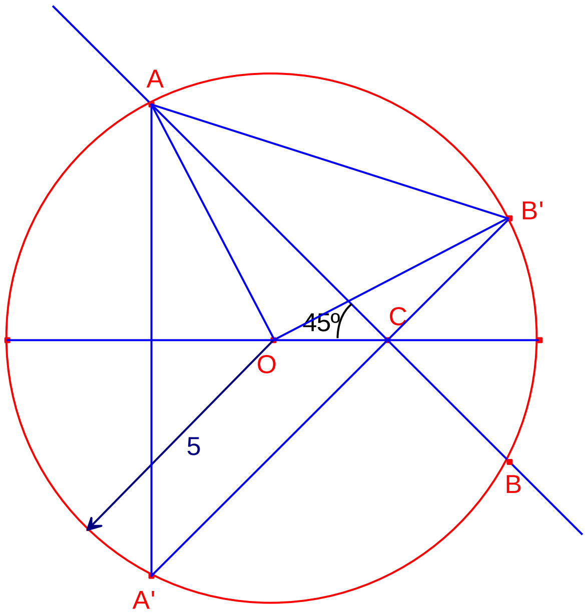
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PML}$:
$4R^2 = (a - 4)^2 + (3a - 10)^2$
$4R^2 = 10a^2 - 68a + 116$

Aleshores:
$a^2 - 9a + 14 = 0$
Resolent l'equació:
$a = 7$
$R^2 = \frac{65}{2}$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi R^2 = \frac{65}{2}\pi$

3383.- En una circumferència de centre O i radi 5 la corda $\overline{AB}$ talla un diàmetre en el punt C tal que $\angle OCA = 45°$
Calculeu $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$



Solució:



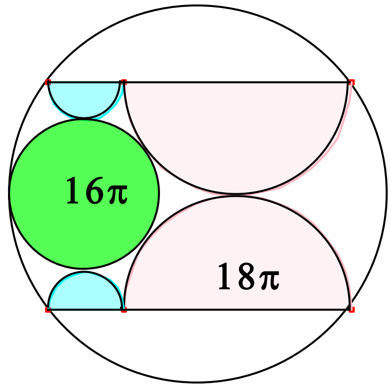
Siga A' el punt simètric de A respecte de la recta OC.
Siga B' el punt simètric de B respecte de la recta OC
$\angle AOA' = \angle BOB' = 90°$
Alesho

$$\angle AOB' = \angle BOA' = \frac{360° - 2 \cdot 90º}{2} = 90°$$

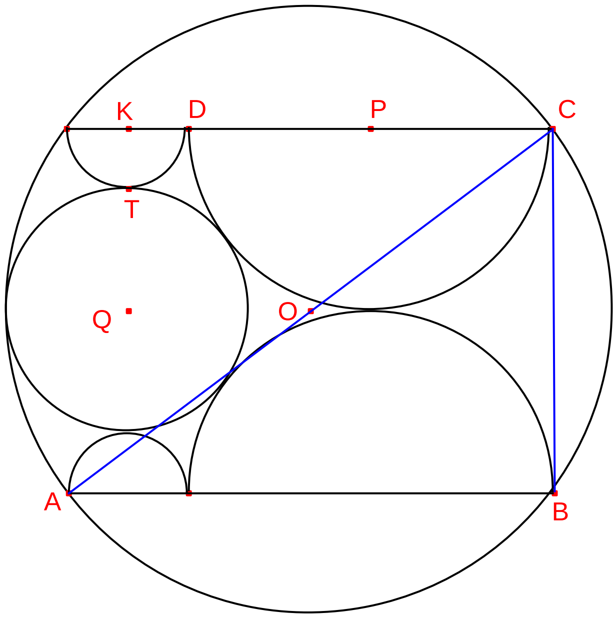
$\angle AOB' = 45°$
$\overline{AB'} = 5\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACB'}$:
$50 = \overline{AC}^2 + \overline{BC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

3384.- Els semicercles pintats del mateix colo són iguals. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



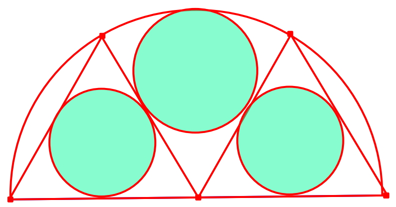
Solució:



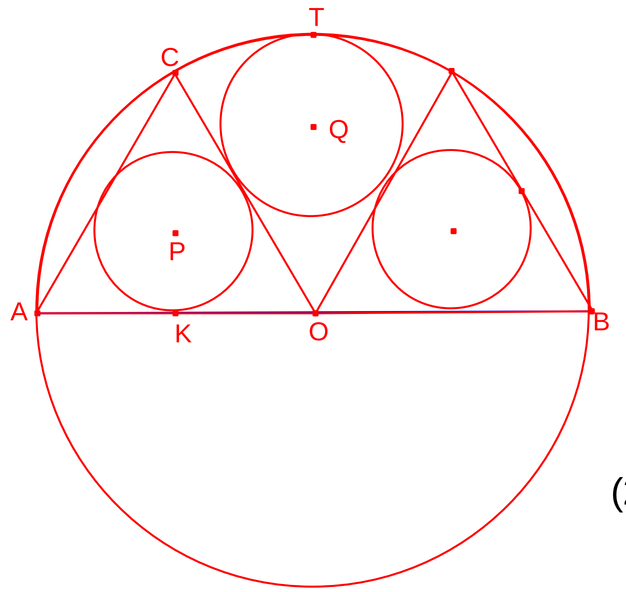
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $R = \overline{OA}$
Siga la semicircumferència de centre P $r = \overline{PC}$ i àrea 18π
$18\pi = \frac{1}{2}\pi r^2$
$r = 6$
Siga la circumferència de centre Q i radi $s = \overline{QT}$ i àrea 16π
$16\pi = \pi s^2$
$s = 4$
Siga la semicircumferència de centre K i radi $t = \overline{KD} = \overline{KT}$
$2t + 2s = 2r$
$t = 2$
$\overline{AB} = 2t + 2r = 16, \overline{BC} = 2r = 12$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle
$4R^2 = 16^2 + 12^2$
$R = 10$

La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{r^2 + s^2 + t^2}{R^2} = \frac{14}{25}$

3385.- La figura està formada per un semicercle, dos triangles equilàters i tres cercles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



OA=R

PK=r

QT=s

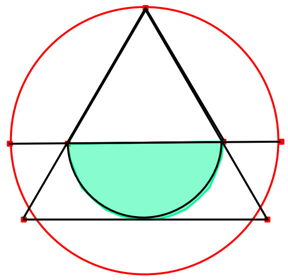
r=sqrt(3)/6·R

s=(1/3)R

Proporció:

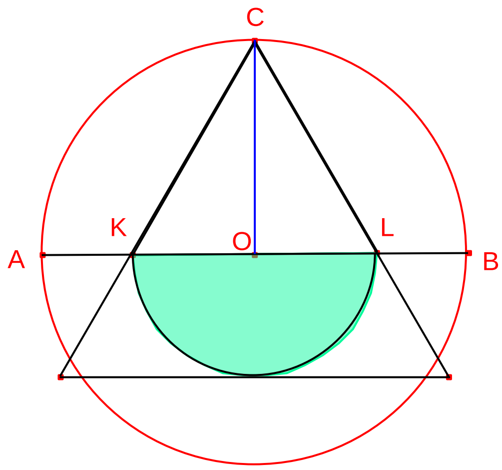
$(2r^2+s^2)/(R^2/2)=5/9$

3386.- La figura està formada per tres semicercles i un triangle equilàter.
Calculeu la proporció entre les àrees del semicercle ombrejat i el cercle exterior.

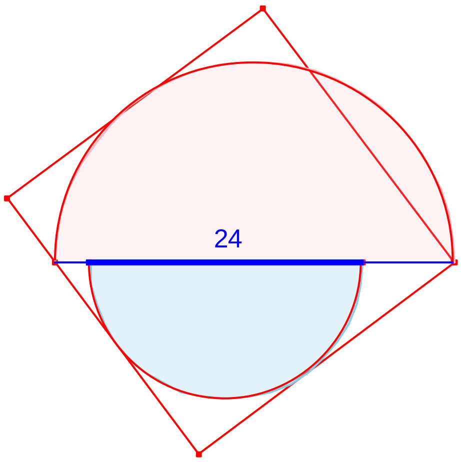


Solució:
Siga O el centre de les tres semicircumferències.
Siga $\overline{OK} = r$ radi de la circumferència menuda.
$\overset{\Delta}{KLC}$ és un triangle equilàter.
El radi de la circumferència exterior és:
$R = \overline{OC} = r\sqrt{3}$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}r^2}{R^2} = \frac{1}{6}$$



3387.- La figura està formada per dos semicircumferències i un quadrat.
La semicircumferència menuda té diàmetre 24.
Calculeu el diàmetre de la circumferència gran.

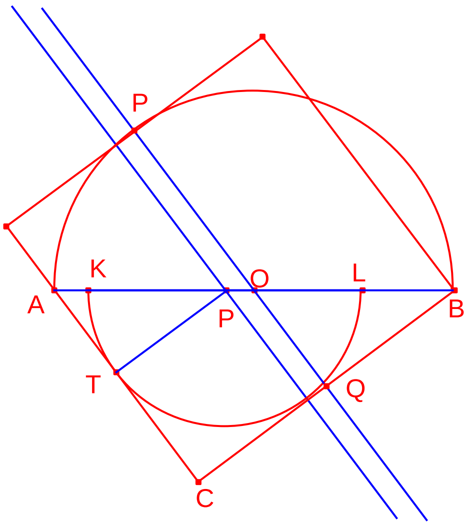


Solució:
Siga la semicircumferència gran de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PK} = \overline{PT} = 12$
Siga $\overline{AT} = a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}, \overset{\Delta}{ACB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+144}} = \frac{a+12}{2R}$$

$$R = \frac{a+12}{a}\frac{\sqrt{a^2+144}}{2}$$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACB}, \overset{\Delta}{OQB}$ són semblants i de raó 2:1
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{OQ} = \frac{a+12}{2}, \overline{BC} = \frac{12(a+12)}{a}$$

$$\overline{PQ} = \overline{BC}$$

$$R + \frac{a+12}{2} = \frac{12(a+12)}{a}$$

$$R = \frac{12(a+12)}{a} - \frac{a+12}{2}$$

Igualant el radis:

$$\frac{a+12}{a}\frac{\sqrt{a^2+144}}{2} = \frac{12(a+12)}{a} - \frac{a+12}{2}$$

Simplificant:

$$\frac{\sqrt{a^2+144}}{2a} = \frac{12}{a} - \frac{1}{2}$$

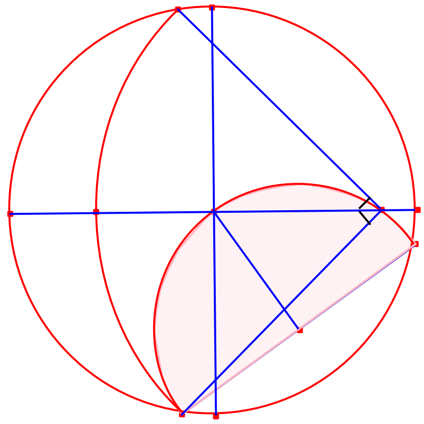
Resolent l'equació:

$$a = 9$$

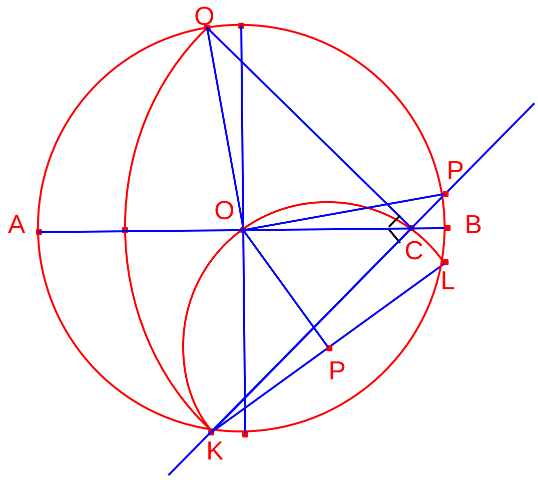
$$R = \frac{35}{2}$$

El diàmetre de la semicircumferència gran és $\overline{AB} = 2R = 35$

3388.- La figura està formada per set quadrants.
Calculeu la proporció entre la regió ombrejada i el tota de la figura.



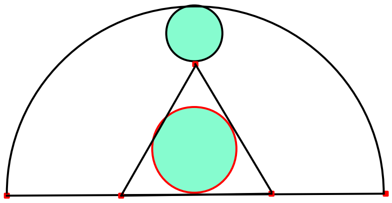
Solució:



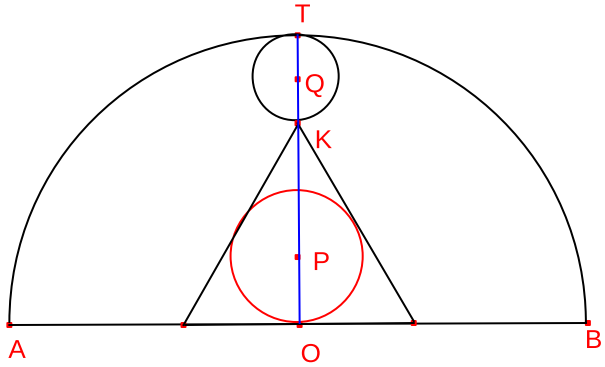
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el semicercle ombrejat de centre P i radi $\overline{PL} = r$
Siga el quadrant de centre C i radi $\overline{CK} = \overline{CQ}$
La recta KC talla la circumferència de centre O en el punt P.
$\overline{PQ} = \overline{KL}, \widehat{PQ} + \widehat{KL} = 180°$
$\widehat{PQ} = \widehat{KL} = 90°$
$\overline{PQ} = 2r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QOP}$:
$R^2 = 2r^2$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

3389.- La figura està formada per un semicercle, un triangle equilàter i dos cercles ombrejats.
Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PO} = r$
Siga el cercle de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
$\overline{OK} = 3r, \overline{KT} = 2s$
$R = 3r + 2s$

La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{r^2 + s^2}{\frac{1}{2}R^2} = \frac{r^2 + \left(\frac{R-3r}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}R^2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{13r^2 - 6rR + R^2}{2R^2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{13}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 3\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{13}{2}\left(\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{6}{13}\left(\frac{r}{R}\right) + \frac{1}{13}\right) = \frac{13}{2}\left(\left(\left(\frac{r}{R}\right) - \frac{3}{13}\right)^2 + \frac{4}{169}\right) \geq \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{169} = \frac{2}{13}$$

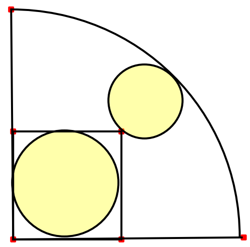
La proporció mínima s'assoleix quan

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{13}$$

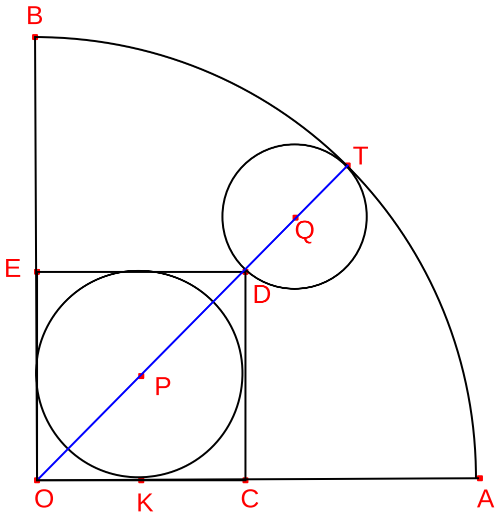
La proporció mínima és:

$$f\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{2}{13}$$

3390.- La figura està formada per un quadrant, un quadrat i dos cercles ombrejats.
Calculeu la proporció mínima entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PK} = r$
Siga el cercle de centre Q i radi $\overline{QT} = s$
Siga el quadrat $OCDE$ de costat $\overline{OC} = 2r$



$\overline{OD} = 2r\sqrt{2}, \overline{DT} = 2s$
$R = 2\sqrt{2}r + 2s$

La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{r^2 + s^2}{\frac{1}{4}R^2} = \frac{r^2 + \left(\frac{R - 2\sqrt{2}r}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}R^2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{12r^2 - 4\sqrt{2}rR + R^2}{R^2}$$

$$f\left(\frac{r}{R}\right) = 12\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(\frac{r}{R}\right) + 1$$

La funció és una paràbola còncava
El mínim s'assoleix en el vèrtex, és a dir, quan:

$$\frac{r}{R} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot 12} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

La proporció mínima és:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$