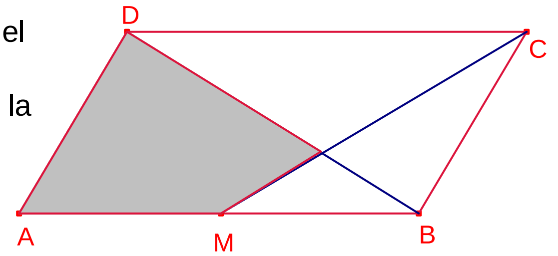
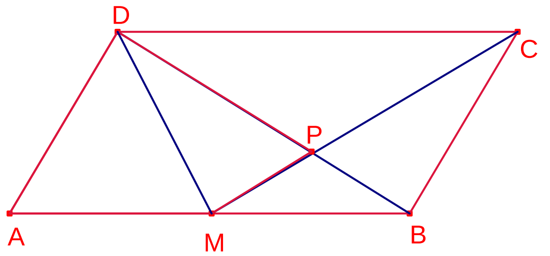
Problemes de Geometria per a l'ESO 34

331.- En la figura ABCD és un paral·lelogram i M és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Si l'àrea del paral·lelogram és 120 calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

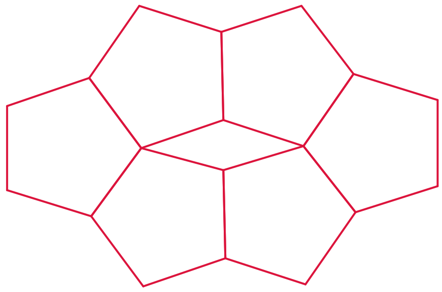


Solució:
Siga P la intersecció dels segments $\overline{BD}$ i $\overline{CM}$.
Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBP}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{MBP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$ són semblants i la raó de semblança $\overline{BM} : \overline{CD} = 1 : 2$
Aleshores la proporció de les àrees és 4.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDP}$ és $4S$.



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
Els triangles $\overset{\Delta}{MBP}$, $\overset{\Delta}{CPB}$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{MP}, \overline{CP}$, respectivament. Aleshores:
$\frac{S_{CPB}}{S_{MBP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{MP}} = 2$. Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CPB}$ és $2S$.
Els triangles $\overset{\Delta}{MBP}$, $\overset{\Delta}{DPM}$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{BP}, \overline{DP}$, respectivament. Aleshores:
$\frac{S_{DPM}}{S_{MBP}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = 2$. Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DPM}$ és $2S$.
Els triangles $\overset{\Delta}{MBD}$, $\overset{\Delta}{AMD}$ tenen la mateixa altura sobre els costats $\overline{BM}, \overline{AM}$, respectivament. Aleshores:
$\frac{S_{AMD}}{S_{MBD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = 1$. $S_{MBD} = 3S$. Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMD}$ és $3S$.

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:
$S_{ABCD} = 12S = 120$ .Resolent l'equació:
$S = 10$.
L'àrea de la zona ombrejada és:
$S_{AMPD} = 5S = 50$.

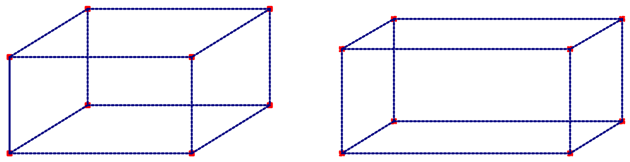


332.- Uns pentàgons regulars són juxtaposats.
Determineu els angles del rombe central.

Solució:
L'angle interior d'un pentàgon regular és 108º.
La mesura de l'angle menor del rombe és 360º menys 3 angles interiors del pentàgon regular.
$360º - 3 \cdot 108º = 36º$.
L'angle major del rombe és el suplementari del menor, 144º.

333.- Un aquari té forma prisma de base quadrada de 48cm conté 60 litres d'aigua. Es transvasa l'aigua a un altre aquari, paral·lelepípede rectangle, de base 36cm per 60cm.
Compareu les altures de l'aigua del primer i segon aquari.

Solució.



60litres ocupen un volum de $60000\,cm^3$.
Siga h_1 l'altura de l'aigua del primer aquari.
Siga h_2 l'altura de l'aigua del segon aquari.

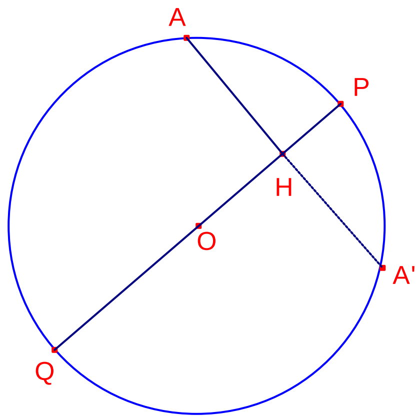
El volum del primer aquari és:
$48^2 \cdot h_1 = 60000$.
El volum del segon aquari és:
$36 \cdot 60 \cdot h_2 = 60000$.
Igualant els volums:
$48^2 \cdot h_1 = 36 \cdot 60 \cdot h_2$.

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{48^2}{36 \cdot 60} = \frac{16}{15}.$$

Notem que la proporció entre les altures no depén de la cabuda del recipient.

334.- La perpendicular traçada des d'un punt d'una circumferència a un diàmetre de la circumferència divideix el diàmetre en dos segments la diferència dels quals de 12cm determineu la mesura del diàmetre de la circumferència si aquesta perpendicular mesura 8cm.
Kutepov 30.

Solució:
Siga $\overline{PQ}$ el diàmetre i siga A un punt de la circumferència tal que $\overline{AH}=8$, $\overline{AH}$ perpendicular al diàmetre $\overline{PQ}$.

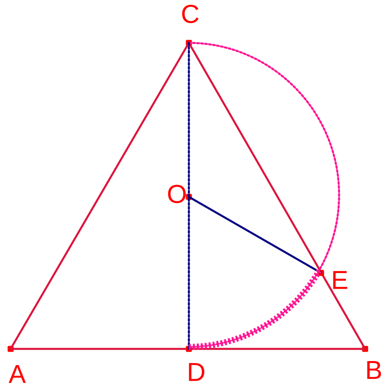


Siga $\overline{PH}=a$, $\overline{QH}=b$ tal que $b-a=12$.
Considerem la corda $\overline{AA'}$ perpendicular a $\overline{PQ}$. Per ser $\overline{PQ}$ diàmetre i perpendicular a la corda H és el punt mig de la corda. Aleshores, $\overline{HA'}=8$.
Aplicant la potència de H respecte de la circumferència:
$\overline{PH}\cdot\overline{QH}=\overline{AH}\cdot\overline{A'H}$.
$ab=8^2$

$(a+b)^2-(b-a)^2=4ab$.
$(a+b)^2-12^2=4\cdot 8^2$.
$(a+b)^2=400$.
$a+b=\overline{PQ}=\sqrt{400}=20\text{cm}$.

335.- En la altura d'un triangle equilàter com diàmetre s'ha dibuixat un semicercle. Calculeu la longitud de l'arc d'aquest semicercle que és interior al triangle si el costat del triangle és 12cm.
Kutepov 78.

Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $c=\overline{AB}$.
Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDB}$:

$\overline{CD}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Siga O el centre del semicercle.

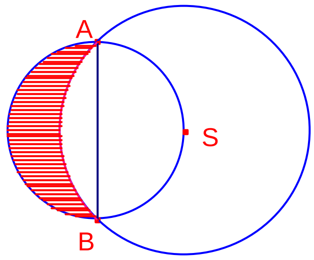
$\overline{OD}=\frac{\overline{CD}}{2}=\frac{c\sqrt{3}}{4}$.

$\angle BCD=30^{o}$, és un angle inscrit en el semicercle, aleshores l'arc $\overset{\frown}{DE}$ mesura 60º.
La longitud de l'arc és igual a la sisena part de la longitud de la circumferència de radi $\overline{OD}$.

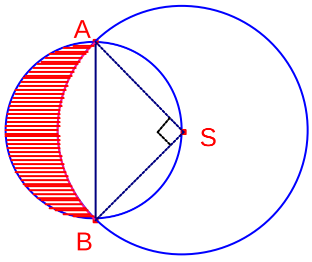
$$L_{arc}=\frac{1}{6}\left(2\pi\frac{c\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{1}{12}c\cdot\pi\sqrt{3}.$$

Si el costat $c=12$, $L_{arc}=\pi\sqrt{3}\approx 5'44\,cm$.

336.- S'han construït dues circumferències, tal com es veu a la figura, de manera que el segment $\overline{AB}$ és diàmetre de la menuda i el punt S, centre de la gran, és en la circumferència menuda. Si el radi de la circumferència gran és r, calculeu l'àrea de la regió ombrejada.
Proves Cangur Catalunya 2011, nivell 3, problema 28.



Solució:
L'angle $\angle ASB = 90^{\circ}$ ja que és un angle inscrit de la circumferència menuda que abraça un diàmetre.



L'àrea ombrejada és igual a mitja cercle menut menys l'àrea del segment circular de la circumferència gran i de 90º graus d'amplària.
$\overline{SA} = \overline{SB} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASB}$
$\overline{AB} = r\sqrt{2}$.

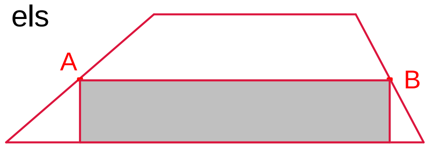
El radi de la circumferència menuda és la meitat de $\overline{AB}$, $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

L'àrea ombrejada és:

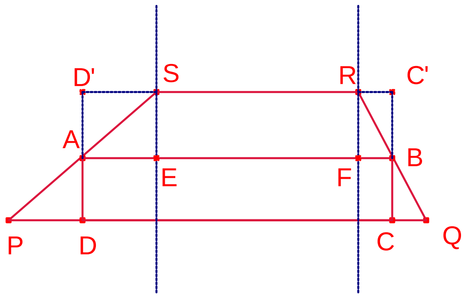
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{1}{2}r^2.$$

Notem que l'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASB}$.

337.- El rectangle ombrejat de la figura té una àrea de 13cm^2, els punts A i B són els punts migs dels costats no paral·lels del trapezi.
Calculeu l'àrea del trapezi.
Proves Cangur Catalunya 2011. Nivell 3, problema 2.



Solució:
Siga PQRS el trapezi.
Siga el rectangle ABCD d'àrea 13.
Siga E la projecció de S sobre $\overline{AB}$.
Siga F la projecció de R sobre $\overline{AB}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDA}$, $\overset{\Delta}{AES}$ són iguals.
Efectuant un gir de 180º de centre A el punt P és transforma en S i el punt D en D'.

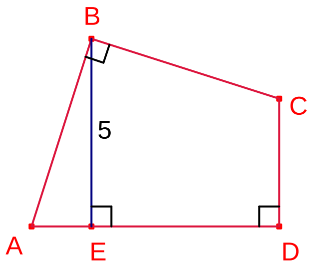


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QCB}$, $\overset{\Delta}{BFR}$ són iguals.
Efectuant un gir de 180º de centre B el punt A és transforma en R i el punt C en C'.

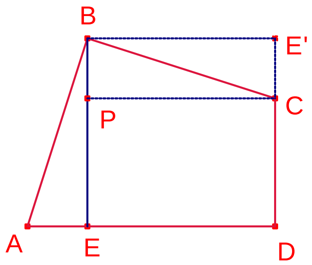
ABC'D' és un rectangle igual al rectangle ABCD, aleshores tenen la mateixa àrea.
Per tant l'àrea del trapezi és el doble de l'àrea del rectangle ABCD, és a dir, 26cm^2

338.- Calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD del dibuix en el qual $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $\overline{BE}$ és perpendicular a $\overline{AD}$ i $\overline{BE} = 5$.

Proves Cangur 2011. Nivell 4, problema 10.



Solució:



Siga P la projecció de C sobre el segment $\overline{BE}$.

Com que $\overline{AB} = \overline{BC}$ els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEB}$, $\overset{\Delta}{CPB}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{PC} = \overline{BE} = 5$.

Si efectuem un gir de centre B i angle 90º el triangle $\overset{\Delta}{AEB}$ es transforma en el triangle $\overset{\Delta}{CE'B}$.

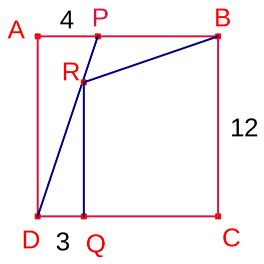
Notem que BEDE' té la mateixa àrea que el quadrilàter ABCD.

Notem que BEDE' és un quadra de costat 5.

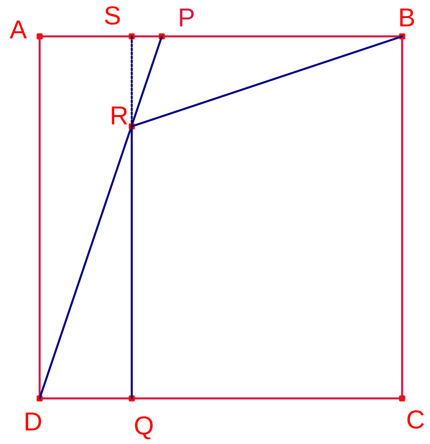
L'àrea del quadrilàter ABCD és:

$S_{ABCD} = 5^2 = 25$.

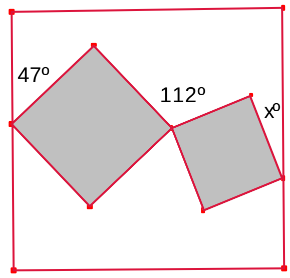
339.- La figura mostra un quadrat ABCD de costat 12, P i Q són punts dels costats, tal que $\overline{AP} = 4$, $\overline{DQ} = 3$. R és un punt del segment $\overline{PD}$ tal que $\overline{RQ}$ és perpendicular a $\overline{DC}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{RB}$.
Proves Cangur 2011. Nivell 4, problema 19.



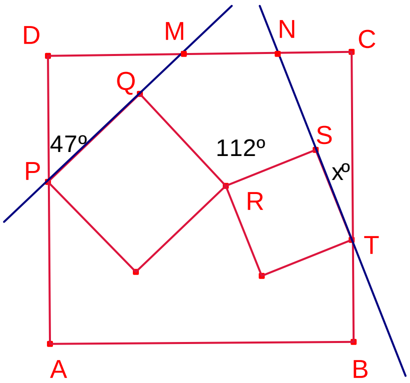
Solució:
La recta RQ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt S.
$\overline{AS} = 3$, $\overline{SP} = 1$, $\overline{BS} = 9$.
El triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{SRP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{SP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{AD}}.$$
$$\frac{1}{4} = \frac{\overline{SR}}{12}.$$
$\overline{SR} = 3$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BSR}$:
$$\overline{RB} = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}.$$
Notem que els triangles $\overset{\Delta}{BSR}$, $\overset{\Delta}{RQD}$ són iguals.



340.- En la figura són conegudes les mesures dels angles marcats amb 47º i 112º.
Els quadrats estan en l'interior d'un rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle marcat amb xº.
Proves cangur 2011. Nivell 1, problema 20.



Solució:



Considerem el rectangle ABCD.
El pentàgon MNSRQ és convex.
La suma dels angles interiors d'un pentàgon convex és $180^{o}(5-2)=540^{o}$.

$\angle MQR=90^{o}$, $\angle RSN=90^{o}$.

$\angle PMD=90^{o}-47^{o}=43^{o}$, aleshores, $\angle QMN=180^{o}-43^{o}=137^{o}$.

$\angle MNS=540^{o}-\left(90^{o}+90^{o}+112^{o}+137^{o}\right)=111^{o}$

$\angle TNC=180^{o}-111^{o}=69^{o}$.

$x^{o}=90^{o}-69^{o}=21^{o}$.