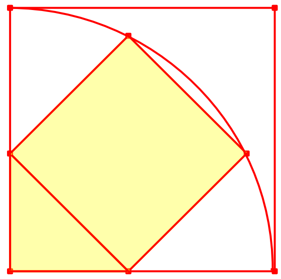
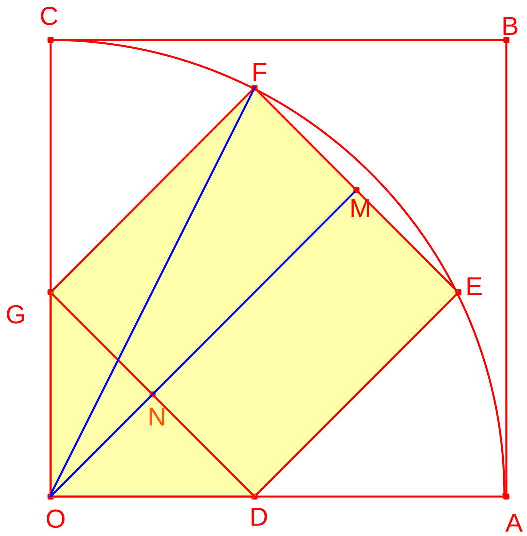
3401.- En un quadrat s'ha dibuixat un quadrant i dins del quadrant un altre quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:



OA=1

AB=c

OM=3c/2

OF=1, FM=c/2

Teorema Pitàgores OMF

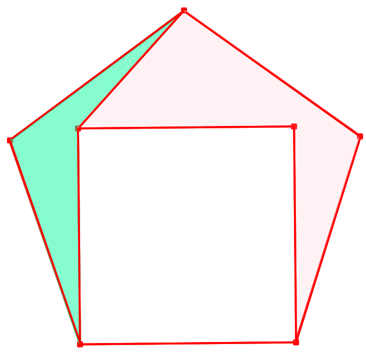
$(3c/2)^2+(c/2)^2=1$

$c^2=2/5$

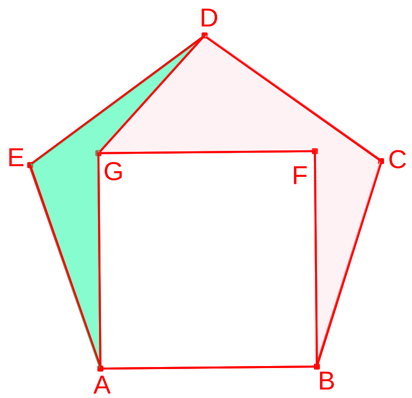
$[ODEFG]=c^2+(1/4)c^2=1/2$

$[ODEFG]=[OABC]=1/2$

3402.- Sobre el costat d'un pentàgon regular s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu la proporció entre les dues regions ombrejades.



Solució:
Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $ABFG$.



$$\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Siga P l'àrea del quadrilàter $AGDE$.
Siga Q l'àrea del pentàgon $BCDGF$.

Siga T l'àrea del pentàgon regular $ABCDE$.

$$P = S_{ADE} - S_{ADG} = \frac{1}{2}\Phi(\sin 36\,° - \sin 18°) =$$
$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})}{16} - \frac{1}{4}$$

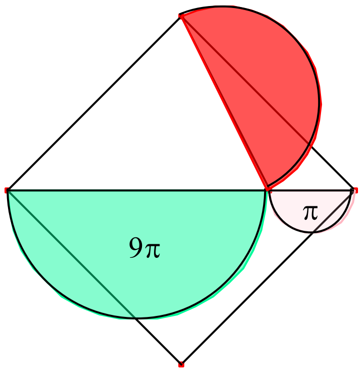
$$T = 2 \cdot S_{ADE} + S_{ABD}\left(= \Phi + \frac{1}{2}\Phi^2\right)\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(5+3\sqrt{5})}{16}$$

$$Q = T - 1 - P = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})}{8} - \frac{3}{4}$$

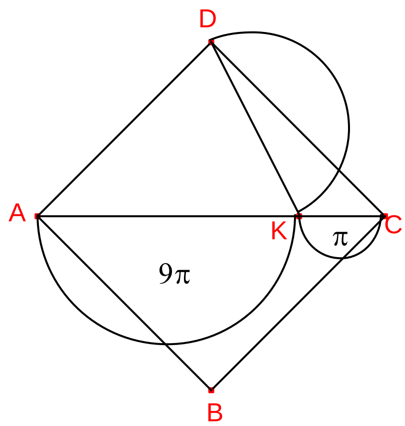
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}(31-9\sqrt{5})}{556} + \frac{48+4\sqrt{5}}{139} \approx 0.4556594583$$

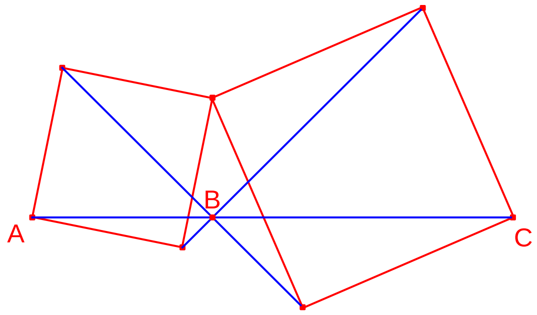
3403.- En la diagonal d'un quadrat s'han dibuixat dos semicercles d'àrees $9\pi, \pi$, respectivament.
Calculeu l'àrea del tercer semicercle.



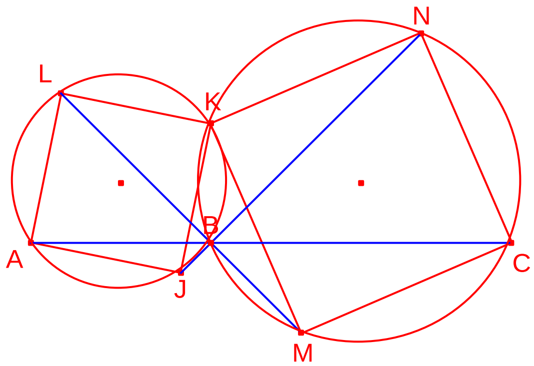
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AK}$ i àrea 9π
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{CK}$ i àrea π
Les àrees dels semicercles són proporcionals als quadrats dels diàmetres.
$$\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} = 3$$
Siga $\overline{CK} = x, \overline{AK} = 3x, \overline{AC} = 4x = c\sqrt{2}$
$c = 2x\sqrt{2}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KCD}$:
$$\overline{DK}^2 = x^2 + 8x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\overline{DK}^2 = 5x^2$$
Les àrees dels semicercles són proporcionals al quadrats dels diàmetres.
$$\frac{S_{roig}}{\pi} = \left(\frac{\overline{DK}}{\overline{CK}}\right)^2 = 5$$
$$S_{roig} = 5\pi$$



3404.- En la figura està formada per dos quadrats amb un vèrtex comú. Proveu que els punts A, B, C estan alineats.



Solució:



Els triangles LKM, JKN són iguals i estan formats per un gir de centre K de 90º

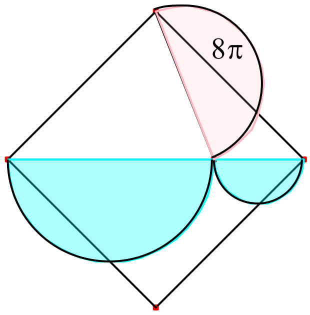
Aleshores, LM, JN són perpendicualrs

Els quadrilàters LAJB, MCNB són cíclics

angle ABJ=angleCBN=45º

Els punts A, B, N, alineats

3405.- La figura està formada per un quadrat i tres semicercles.
Dos dels semicercles estan en la diagonal del quadrat
L'altre té àrea 8π
s'han dibuixat dos semicercles d'àrees, respectivament.
Calculeu la suma de les àrees dels semicercles dibuixats sobre la diagonal

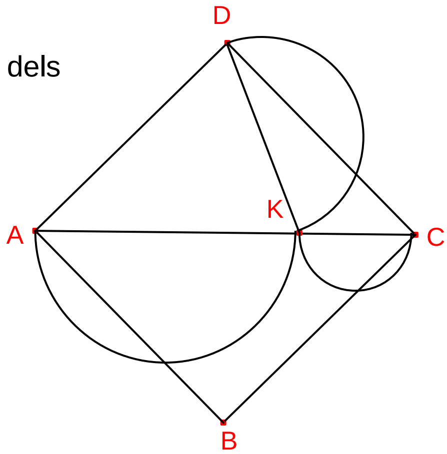


Solució.
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$
Les àrees dels semicercles són proporcionals als quadrats dels diàmetres.
Siga $\overline{CK} = k, \overline{AK} = rk$

$\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} = r$

$\overline{AC} = k(1+r) = c\sqrt{2}$

$c = \frac{\sqrt{2}}{2}k(1+r)$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KCD}$:

$\overline{DK}^2 = k^2 + \frac{1}{2}k^2(1+r)^2 - 2 \cdot k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}k^2(1+r) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{DK}^2 = \frac{1}{2}(k^2 + r^2k^2)$

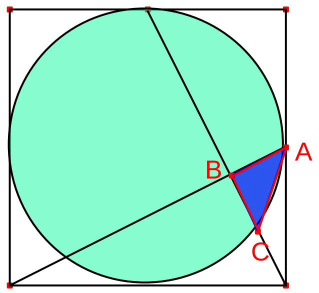
Les àrees dels semicercles són proporcionals al quadrats dels diàmetres.

$\frac{S_{ombrejada}}{8\pi} = \left(\frac{\overline{CK}}{\overline{DK}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AK}}{\overline{DK}}\right)^2 = 2$

$S_{ombrejada} = 16\pi$

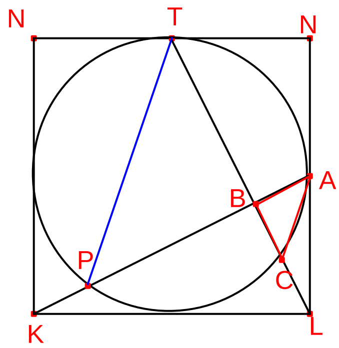
3406.- La figura està formada per un quadrat i una circumferència inscrita al quadrat.

Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i de l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KLA}, \overset{\Delta}{LNT}$ són iguals i els catets corresponents són perpendicular. Aleshores, les hipotenuses són perpendiculars.
$\angle ABC = 90°$
Siga P la intersecció de $\overline{AK}$ i la circumferència.
Per ser angle inscrit en la circumferència:



$\angle TPA = \frac{1}{2}90° = 45°$
$TCA = \angle TPA = 45°$

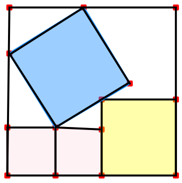
Aleshores el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KLA}, \overset{\Delta}{LBA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BL} = 2x$

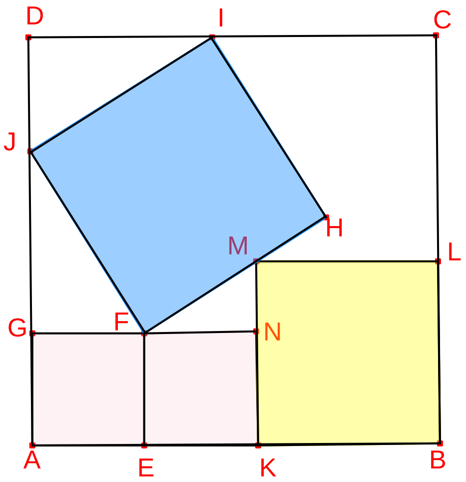
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LBA}$:
$x^2 + 4x^2 = \frac{1}{4}$
$x^2 = \frac{1}{20}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{40}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ABC}}{S_{KLMN}} = \frac{1}{40}$

3407.- La figura està formada per 5 quadrats.
Calculeu la proporció entre l’àrea del quadrat groc i l’àrea del quadrat exterior.



Solució:

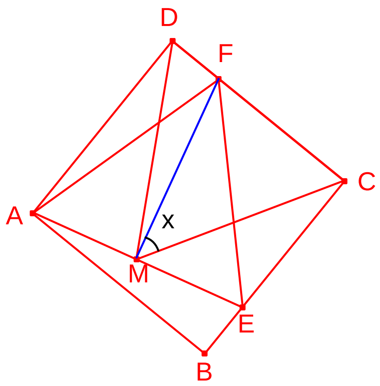


AE=1, GJ=x

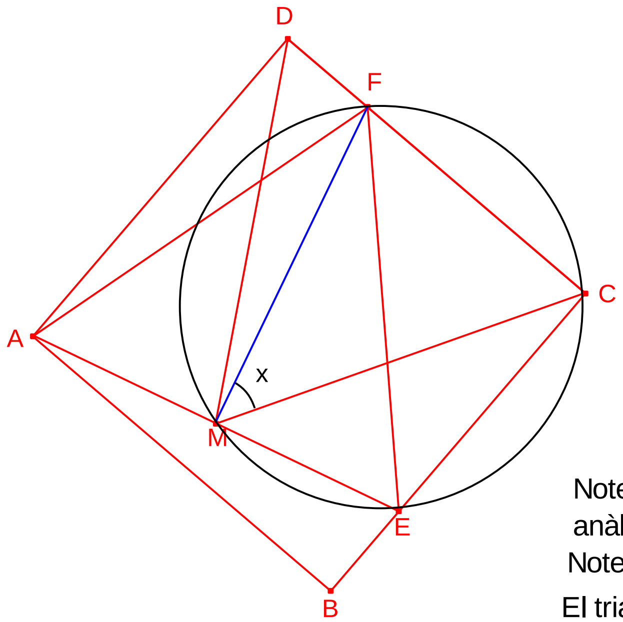
DJ=1, DI=x
MN=1/x
2+x=3+1/x
x=(1+sqrt(5))/2=Phi

[KBLM]/[ABCD]=(1+1/x)²/(2+x)²=1/5

3408.- En la figura ABCD és un quadrat, $\overset{\Delta}{AEF}$ un triangle equilàter.
M és el punt mig del costat $\overline{AE}$
Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle FMC$



Solució:



AEF equilàter

angle FEC=45º, angle AEF=60º
angle MEC=105º

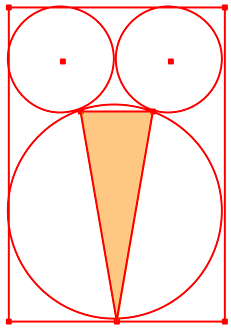
angle EFC=45º, angleMFE=30º
ange MFC=75º-=80º-angle MEC

ECFM cíclic

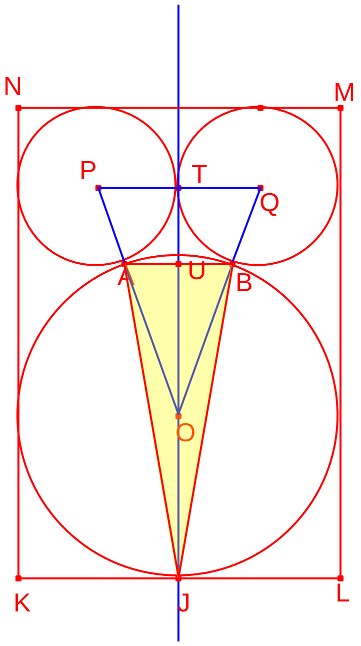
x=angle FMC=angle FEC=45º

Notem que angle MCF=angle MCF=60º
anàlogament, AMFD és ciclic
Notem que angle MDF=angleAFM=60º
El triangle CDM és equilàter

3409.- La figura està formada per tres circumferències tangents dos a dos, inscrites en un rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea del rectangle.



Solució:



PT=PA=r, OA=2r

OT=2sqrt(2)r

AB=(4/3)r

UO=(4/3)sqrt(2)r

UJ=((4/3)sqrt(2)+2)r

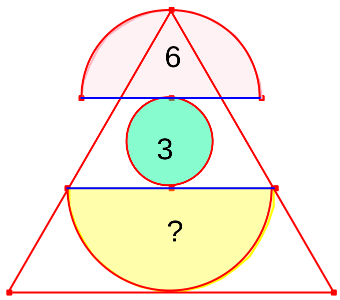
KL=4r, KN=(3+2sqrt(2))·r

[AJB]=(4/9)(3+2sqrt(2))·r²

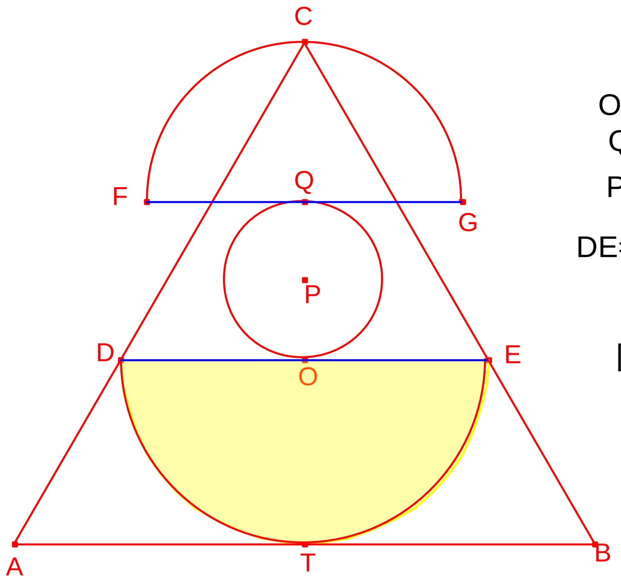
[KLMN]=4(3+2sqrt(2))·r²

[AOB]/[KLMN]=1/9

3410.- La figura està formada per un triangle equilàter, dos semicercles i un cercle.
Un semicercle té àrea 6 i el cercle àrea 3
Calculeu l’àrea del segon semicercle.



Solució:



OT=OD=R

QC=QF=r, Pi·r²=12

PQ=r/2

DE=CE, 2R=(4·sqrt(3)/3)r

[groc]/6=(R/r)²=4/3

[groc]=8