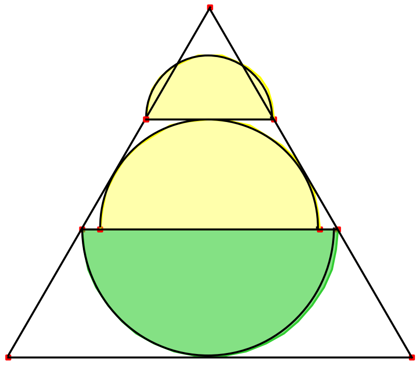
3411.- La figura està formada per un triangle equilàter i tres semicercles. Calculeu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea groga.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga el semicercle verd de centre L i radi $\overline{LD} = \overline{LK} = r$

Siga el semicercle groc de centre L i radi $\overline{LM} = \overline{LT} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$

Siga el semicercle groc de centre M i radi $\overline{MF} = s$

$\overline{MC} = s\sqrt{3}$

$\overline{CK} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r + s\sqrt{3}$

Siga H la projecció de D sobre $\overline{AB}$.

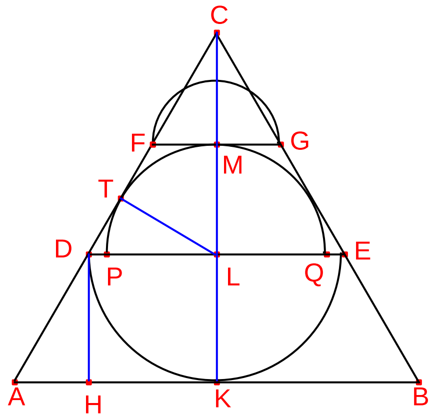
$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$

$\overline{AK} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r$

$\overline{CK} = \sqrt{3} \cdot \overline{AK} = (1 + \sqrt{3}) r$

$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r + s\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) r$

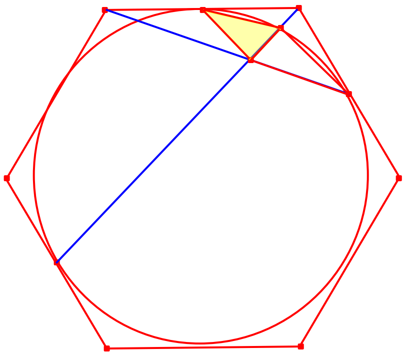
$s = \frac{1}{2} r$



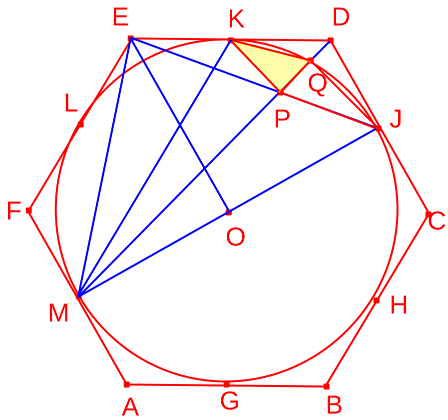
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r\right)^2 + s^2}{r^2} = \frac{\frac{3}{4} r^2 + \frac{1}{4} r^2}{r^2} = 1$$

3412.- La figura està formada per un hexàgon regular i la seua circumferència inscrita.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O.
Siguen G, H, J, K, L, M els punts de tangència de la circumferència i l'hexàgon regular, que són vèrtexs d'un hexàgon regular.



$\angle KQM = 60°, \angle KMJ = 30°$

$\overline{MJ} = \sqrt{3}, \overline{MK} = \frac{\overline{EF} + \overline{AD}}{2} = \frac{3}{2}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MJD}$

$\overline{EJ} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MJD}$

$\overline{MD} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Siga $\alpha = \angle DMJ$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{39}}{13}$

$\angle KMD = 30° - \alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KMD}$:

$\frac{\overline{KQ}}{\sin(30° - \alpha)} = \frac{\overline{MK}}{\sin 60°}, \overline{KQ} = \frac{3\sqrt{13}}{26}$

Siga $\beta = \angle MEO$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \sin 2\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EMP}$:

$\frac{\overline{MP}}{\sin 2\beta} = \frac{\overline{ME}}{\cos(\beta - \alpha)}, \overline{MP} = \frac{2\sqrt{13}}{5}$

Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència:

$\overline{DQ} \cdot \overline{MD} = \frac{1}{4}, \overline{DQ} = \frac{\sqrt{13}}{26}$

$\overline{MQ} = \overline{MD} - \overline{DQ} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

$\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} = \frac{4\sqrt{13}}{65}$

$S_{KPQ} = \frac{1}{2}\overline{KQ} \cdot \overline{PQ} \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{26} \cdot \frac{4\sqrt{13}}{65} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{65}$

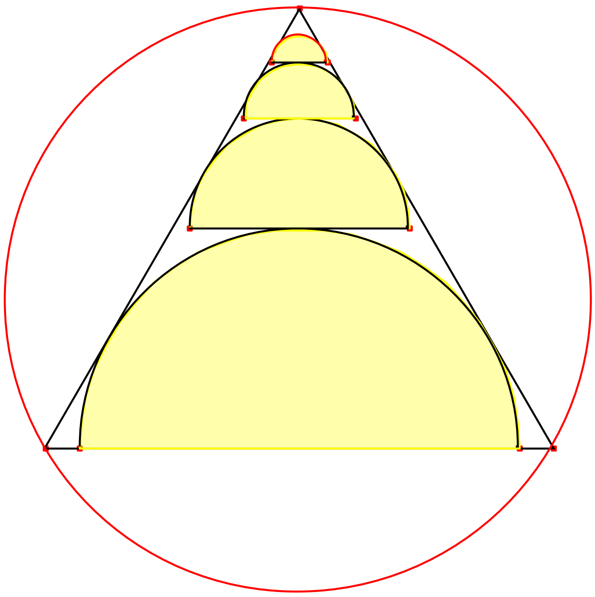
L'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ és:

$S_{ABCDEF} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

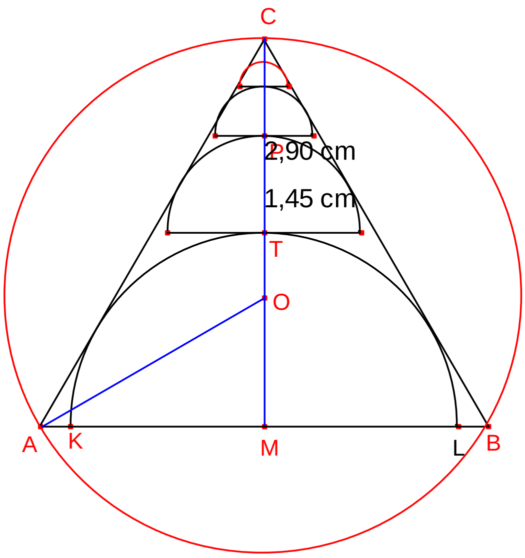
La proporció d'àrees és:

$\frac{S_{KPQ}}{S_{ABCDEF}} = \frac{1}{65}$

3413.- La figura està formada per un triangle equilàter, la seua circumferència circumscrita i infinits cercles.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels infinit cercles i l’àrea del cercle.



Solució:



$MT=r1$, $TP=r2$

$AM=(4/3)\text{sqrt}(3)\cdot r1$

$CM=2r$

$r2/r1=(CM-r1)/CM$

$r2/r1=1/2$

$R=OA=(4/3)r1$

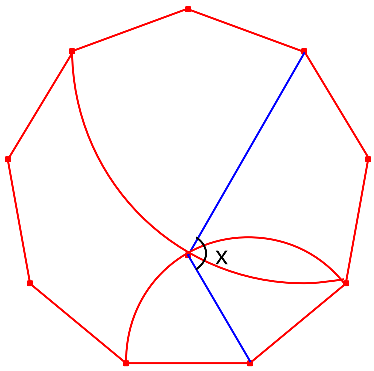
$(r2/r1)^2=1/4$

àrea infinita$=((1/2)Pi\cdot r1^2/(1-1/4))=(2/3\cdot Pi)\cdot r1^2$

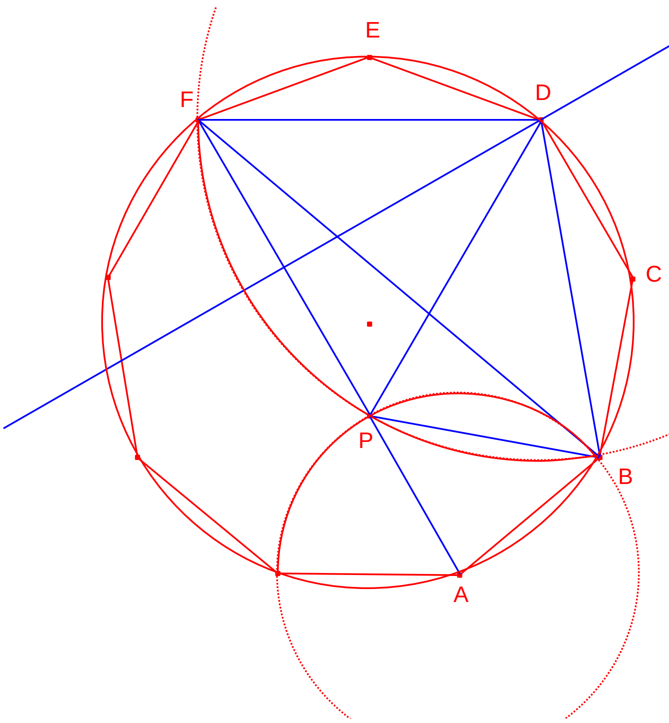
Proporció àrees:

$(2/3)/(16/9)=3/8$

3414.- En un polígon regular de 9 costats s'han dibuixat dos arcs de centres dos vèrtexs. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



anglePBF=a

angle FDP=2a

angleFBD=angleBFD=40º

anglePBD=angleDPB=40º+a

anglePDB=80º-2a

angleFPD=anglePFD=90º-a

angleBFP=50-a

angleBFP=anglePDB

80º-2a=50-a

a=30º

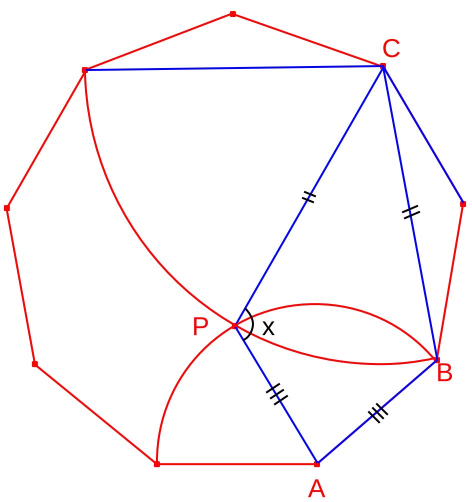
angle DPB=70º

angle ABP=140º-(a+40º+20º)=50

angleAPB=anglABP=50º

x=angleDPA=70º+50º=120º

Solució 2:



angleABC=120º

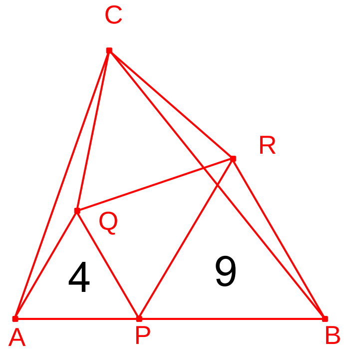
ABCD un cometa

x=angleABC=120º

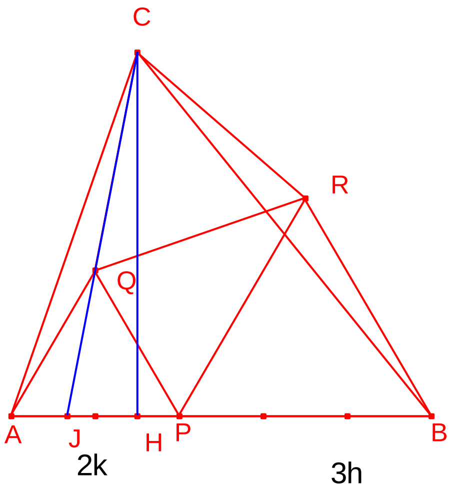
3415.- La figura està formada per tres triangles equilàters $\overset{\Delta}{APQ}, \overset{\Delta}{PBR}, \overset{\Delta}{QRC}$.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APQ}, \overset{\Delta}{PBR}$ són 4, 9, respectivament.

Calculeu les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{QRC}, \overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:



k²·sqrt(3)=4

Teorema cosinus PQR

QR²=7k²

[QRC]=7

x=angleRQP

Teorema cosinus PQR

cos(x)=sqrt(7)/14, sin(x)=3sqrt(21)/14

h=CH, b=JQ

angleCJP=angle RQP=x

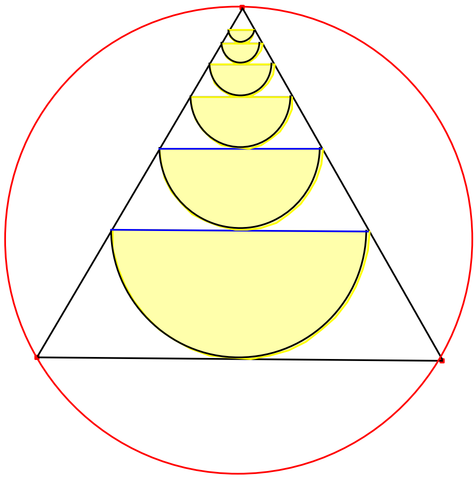
Teorema sinus JPQ

b=2·sqrt(7)/3·k

h=5·sqrt(3)/3·k

[ABC]=(1/2)5k·5·sqrt(3)k=25

3416.- La figura està formada per un triangle equilàter, la seua circumferència circumscrita i infinits cercles.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels infinit cercles i l'àrea del cercle.

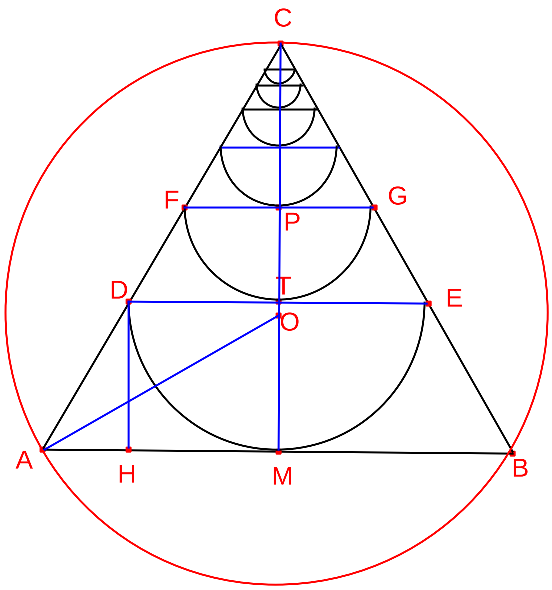


Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O
Siga $\overline{OM} = R$ radi de la circumferència circumscrita.
Siga el semicercle de centre T i radi $\overline{TD} = \overline{TM} = r_1$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PF} = \overline{PT} = r_2$
Siga H la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$:

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{3} r_1$$

$$\overline{AM} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r_1$$



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{OD}}{\overline{MA}} = \frac{r_1}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r_1} = \frac{3}{(3 + \sqrt{3})}$$

Les àrees de les semicircumferències formen una progressió geomètrica de raó:

$$k = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{3}{(3 + \sqrt{3})}\right)^2 = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2} < 1$$

La suma de les infinites àrees dels semicercles és:

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}\pi {r_1}^2}{1 - \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{11} \pi {r_1}^2$$

$$\overline{CM} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r_1 = (1 + \sqrt{3}) r_1$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3}\right) r_1$$

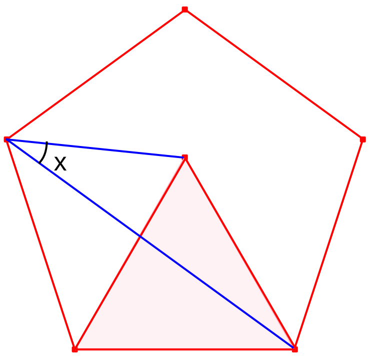
$$R = \overline{OA} = 2 \cdot \overline{OM} = \frac{2}{3}(1 + \sqrt{3}) r_1$$

$$R^2 = \frac{8}{9}(2 + \sqrt{3}) {r_1}^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_\infty}{S_o} = \frac{\frac{4 + 3\sqrt{3}}{11}\pi {r_1}^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{4 + 3\sqrt{3}}{11}}{\frac{8}{9}(2 + \sqrt{3})} = \frac{-9 + 18\sqrt{3}}{88} = 0.2520$$

3417.- La figura està formada per un pentàgon regular i un triangle equilàter sobre un costat. Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:

Siga el pentàgon regular $ABCDE$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABF}$

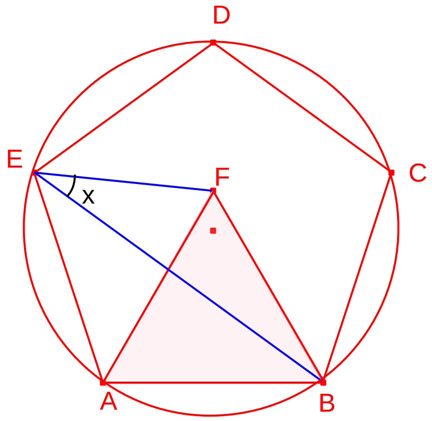
$\angle ABE = \angle AEB = 36°, \angle EAB = 108°$

$\angle EAF = 108° - 60° = 48°$

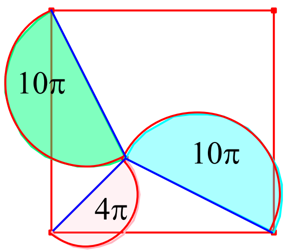
El triangle $\overset{\Delta}{EAF}$ és isòsceles

$36° + x = \dfrac{180° - 48°}{2} = 66°$

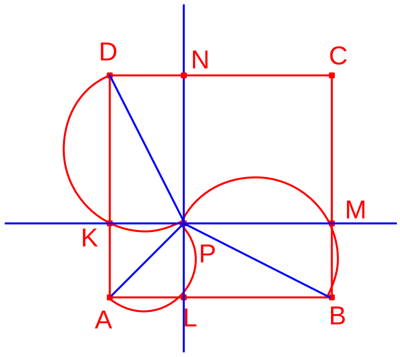
Aleshores, $x = 30°$



3418.- La figura està formada per tres semicercles d'àrees $4\pi, 10\pi, 10\pi$ amb un vèrtexs comú, els altres vèrtexs són els vèrtexs d'un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



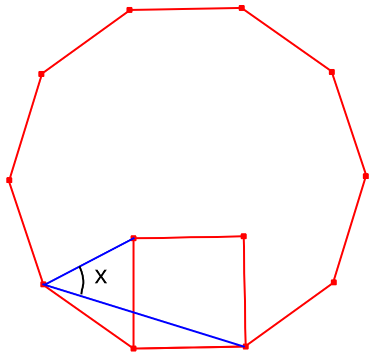
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
$\overline{PB} = \overline{PD}$
Siga $\overline{BM} = \overline{DN} = a$
Siga $\overline{CM} = \overline{CN} = b$
$\overline{AP}^2 = 2a^2$
$\overline{CP}^2 = 2b^2$
$\overline{PB}^2 = a^2 + b^2$



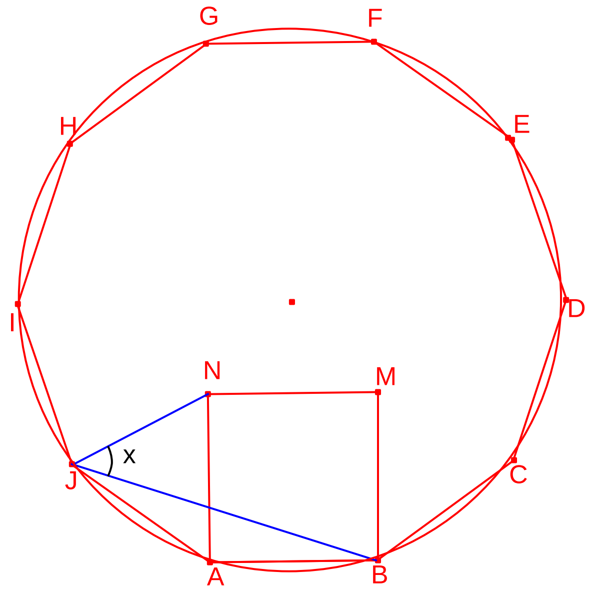
$\frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\overline{AP}^2 = 4\pi$
$a^2 = 16$
$a = 4$

$\frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\overline{BP}^2 = 10\pi$
$\frac{1}{8}(a^2 + b^2) = 10$
$b^2 = 64$
$a = 8$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = (a + b)^2 = 12^2 = 144$

3419.- La figura està formada per un decàgon regular i un quadrat sobre un costat.
Calculeu la mesura de l'angle x

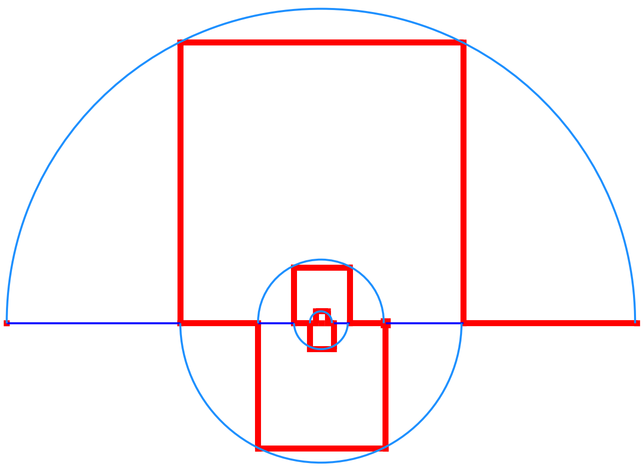


Solució:



Solució:
Siga el decàgon regular $ABCDEFGHIJ$.
Siga el quadrat $ABMN$
$\angle ABJ = \angle AJB = 18°, \angle JAB = 144°$
$\angle JAN = 144° - 90° = 54°$
El triangle $\overset{\Delta}{JAF}$ és isòsceles
$$18° + x = \frac{180° - 54°}{2} = 63°$$
Aleshores, $x = 45°$

3420.- El radi de la circumferència exterior és 1.
Calculeu la mesura de la línia poligonal infinita



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = 1$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{CD} = c$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = d$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODE}$:

$$c = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BD} = 1 - \frac{1}{2}c = \frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

Els quadrats $ABCD, KLMN$ són semblants i de raó $2 : c$

$$\frac{d}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Considerem la successió de poligonal,
$3 \cdot \overline{DE} + \overline{BD} = 1 + \sqrt{5}, 3 \cdot \overline{NM} + \overline{NP}, \dots \dots$

És una progressió geomètrica de raó, $\frac{d}{c} = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$

La longitud infinita és:

$$L_\infty = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$$