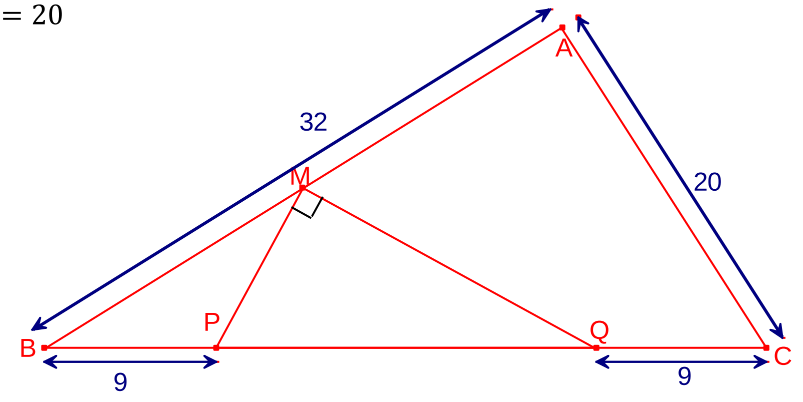
3421.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = 32, \overline{AC} = 20$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMQ}, M = 90°$
Siga $\overline{BP} = \overline{CP} = 9$

Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

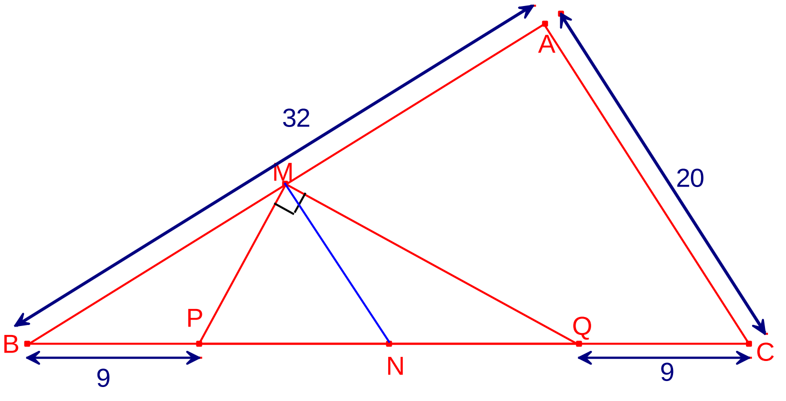


Solució 1:
Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$, punt mig del costat $\overline{PQ}$.
$\overline{MN} = \overline{PM} = \overline{QN} = x$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BMN}$
$x^2 = 16^2 + (9 + x)^2 - 2 \cdot 16(9 + x) \cdot \cos B$

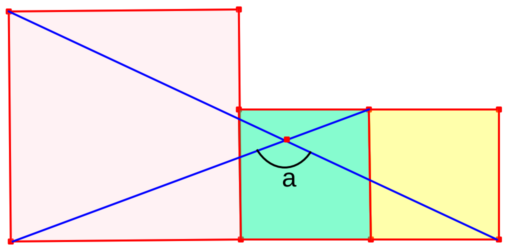
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$20^2 = 32^2 + (18 + 2x)^2 - 2 \cdot 16(18 + 2x) \cdot \cos B$
$4x^2 = 20^2$
$x = 10$
$\overline{BC} = 18 + 2x = 38$
El perímetre és:
$a + b + c = 38 + 20 + 32 = 90$

Solució 2:
Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$, punt mig del costat $\overline{PQ}$.
$\overline{MN} = \overline{PM} = \overline{QN} = x$

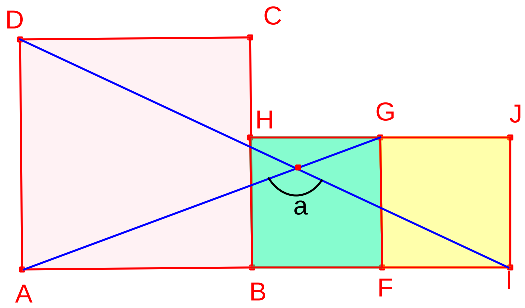


Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{MBN}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:
$x = \dfrac{1}{2} b = 10$
$\overline{BC} = 18 + 2x = 38$
El perímetre és:
$a + b + c = 38 + 20 + 32 = 90$

3422.- La figura està formada per tres quadrats, dos d'ells iguals.
Calculeu la mesura de l'angle a



Solució:



b=angleAFG, c=angle AID
x=AB, y=BF

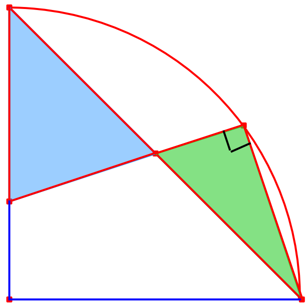
tan b=y/(x+y), tan c=x/(a+2y)

a=180º-(b+c)

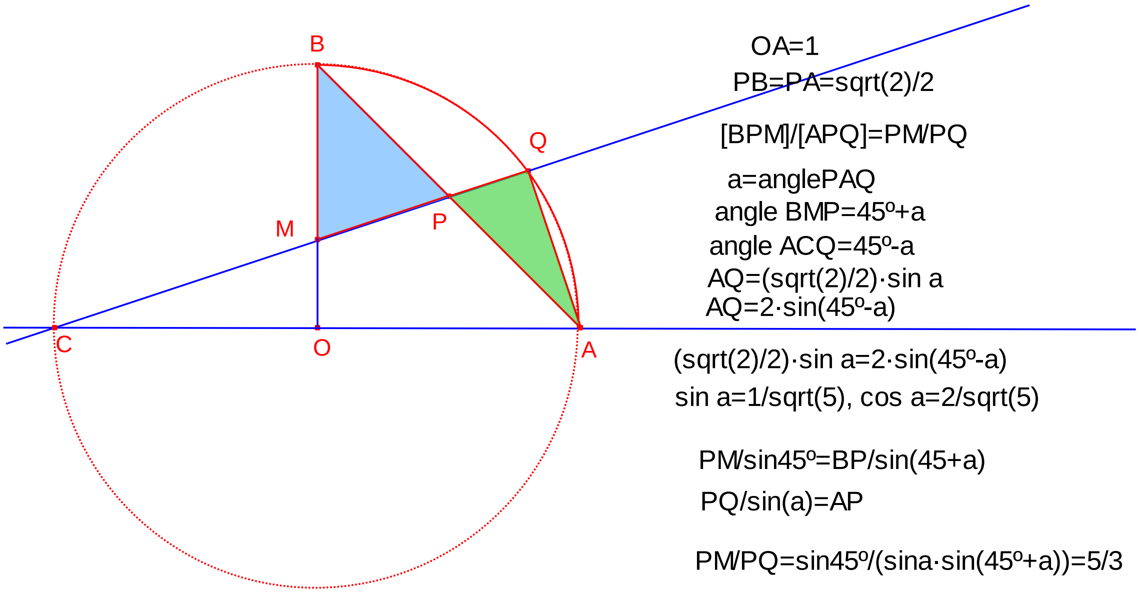
tan a=-tan(b+c)=-1

a=135º

3423.- En la figura, determineu la proporció entre les àrees dels triangles blau i verd



Solució:



OA=1

PB=PA=sqrt(2)/2

[BPM]/[APQ]=PM/PQ

a=anglePAQ

angle BMP=45º+a

angle ACQ=45º-a

AQ=(sqrt(2)/2)·sin a

AQ=2·sin(45º-a)

(sqrt(2)/2)·sin a=2·sin(45º-a)

sin a=1/sqrt(5), cos a=2/sqrt(5)

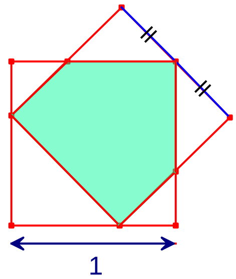
PM/sin45º=BP/sin(45+a)

PQ/sin(a)=AP

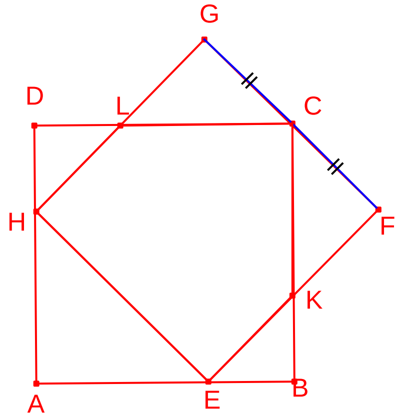
PM/PQ=sin45º/(sina·sin(45º+a))=5/3

[BPM]/[APQ]=PM/PQ=5/3

3424.- En la figura hi ha dos quadrats un d'ells de costat 1.
Calculeu l'àrea del pentàgon ombrejat.

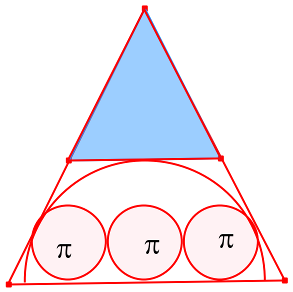


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $EFGH$ de costat $\overline{EF} = 2c, \overline{CG} = \overline{CF} = c$

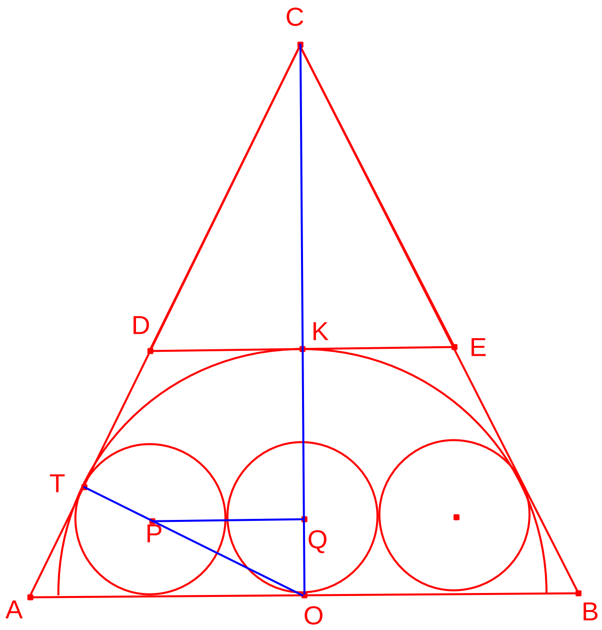


$\overline{CL} = c\sqrt{2}$
$\overline{DL} = 1 - c\sqrt{2}$
$\overline{HL} = \sqrt{2} - 2c$
$\sqrt{2} - 2c + c = 2c$
$3c = \sqrt{2}$
L'àrea del pentàgon $EKCLH$ és:
$$S_{EKCLH} = s_{EFGH} - 2 \cdot S_{KFC} = 4c^2 - c^2 = 3c^2 = \frac{2}{3}$$

3425.- La figura està formada per un triangle isòsceles, tres cercles tangents d'àrea π i un semicercle. Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



OQ=1, PQ=2

OP=sqrt(5)

OT=1+sqrt(5)

AT=OT/2

OA=(5+sqrt(5)/2

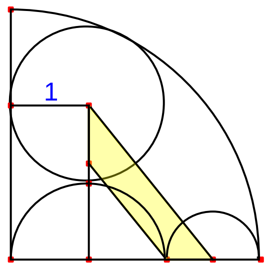
OC=5+sqrt(5)

CK=4

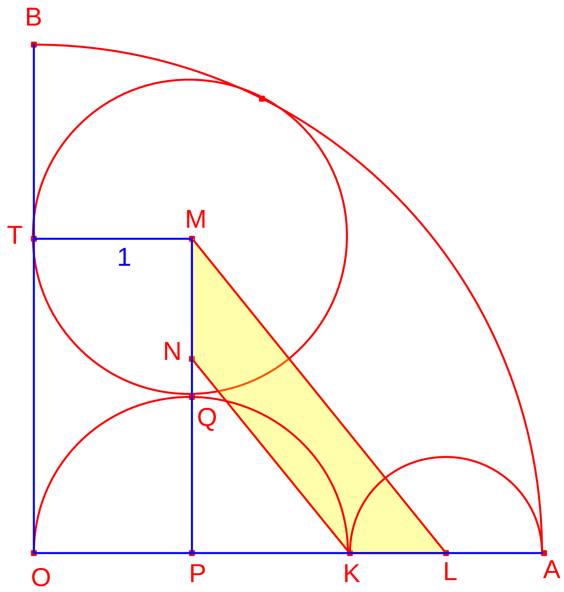
DE=4

[DEC]=8

3426.- En la figura, un quadrant conté una circumferència i dues semicircumferència.
Calculeu ‘àrea del trapezi ombrejat.



Solució:



TM=1,

MQ=PQ=OP=1

r=LA=LK

OA=2+2r

OM=1+2r

Teorema Pitàgores OPM

$(1+2r)^2=5$

r=1/Phi

PL=Phi

b=PN

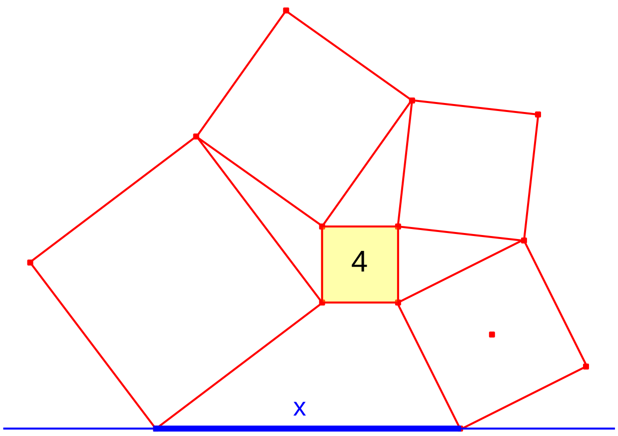
b/2=2/Phi

[PLM]=Phi

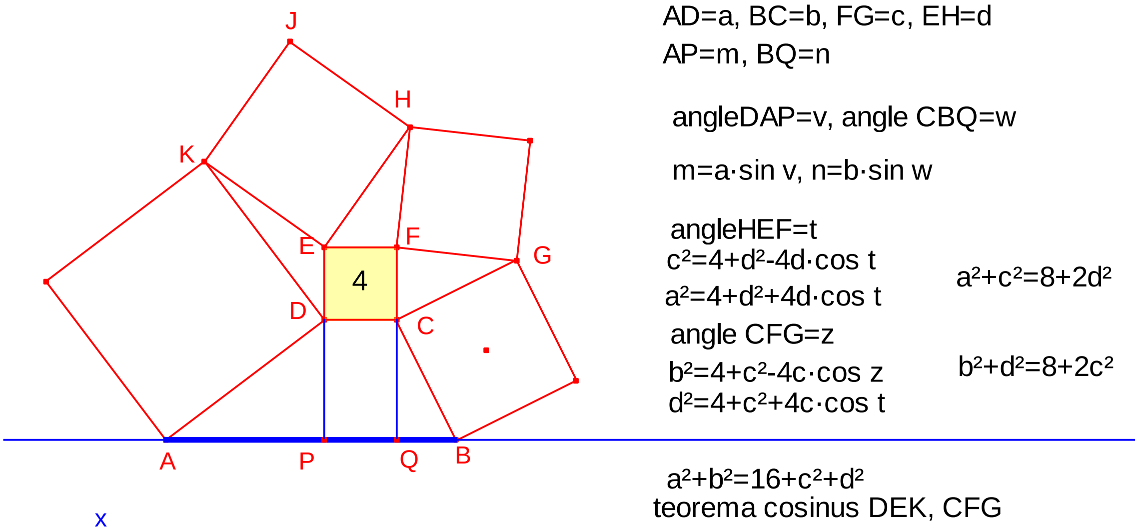
[PKN]=1/Phi

[KLMN]=[PLM]-[PKN]=1

3427.- En la figura, el quadrat central té àrea 4.
Calculeu la mesura del segment x paral·lel a dos costats del quadrat central.



Solució



AB=x
AD=a, BC=b, FG=c, EH=d
AP=m, BQ=n

angleDAP=v, angle CBQ=w

$m=a\cdot\sin v$, $n=b\cdot\sin w$

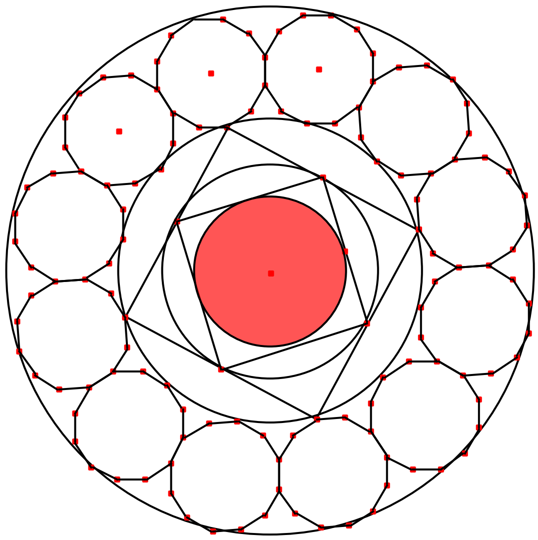
angleHEF=t
$c^2=4+d^2-4d\cdot\cos t$
$a^2=4+d^2+4d\cdot\cos t$
$a^2+c^2=8+2d^2$
angle CFG=z
$b^2=4+c^2-4c\cdot\cos z$
$d^2=4+c^2+4c\cdot\cos t$
$b^2+d^2=8+2c^2$

$a^2+b^2=16+c^2+d^2$
teorema cosinus DEK, CFG

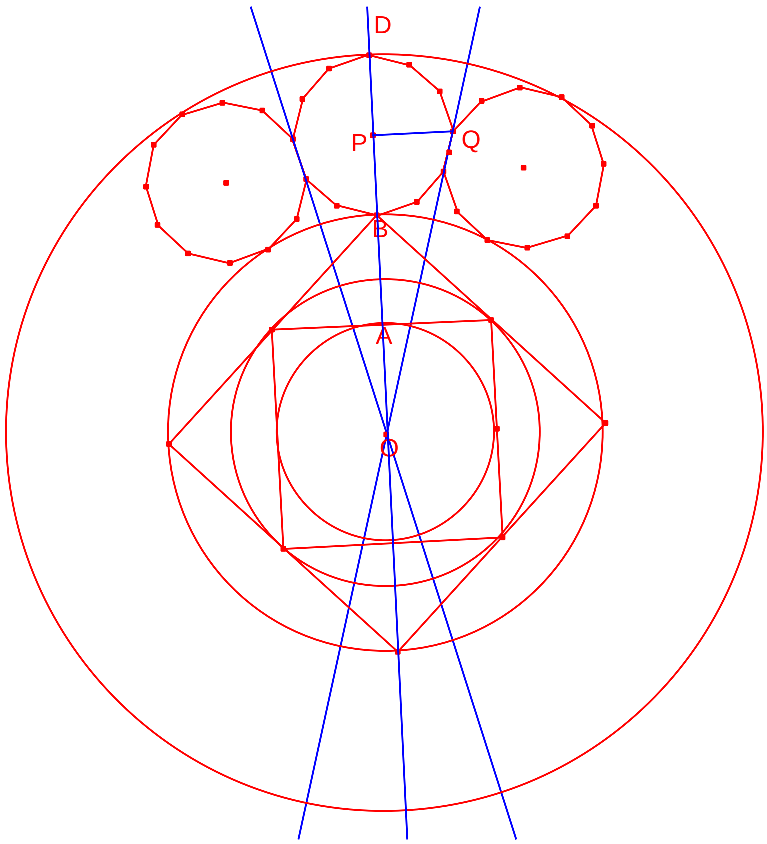
$d^2=a^2+4-4a\cdot\sin v=a^2+4+4m$
$c^2=b^2+4-4b\cdot\sin w=b^2+4+4n$
$m+n=6$

$x=6+2=8$

3428.- La figura està formada per dos quadrats, tres circumferències i dotze dodecàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



OA=r=1

OB=2

PB=PD=PQ=a

angleDOQ=15º

a/(2+a)=tan15º

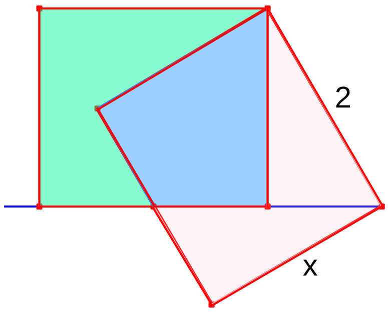
a=-1+sqrt(3)

R=OD=2+2a=2·sqrt(3)

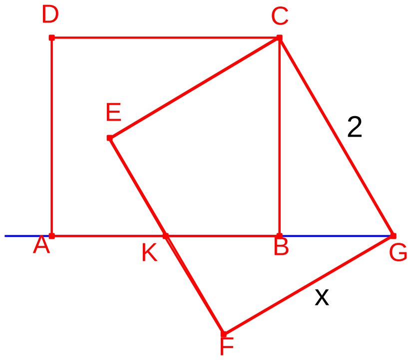
Proporció àrees:

$(r/R)^2=1/12$

3429.- La figura està formada per dos rectangles iguals amb un vèrtex comú.
Si les tres regions ombrejades tenen la mateixa àrea, calculeu la mesura del costat x.



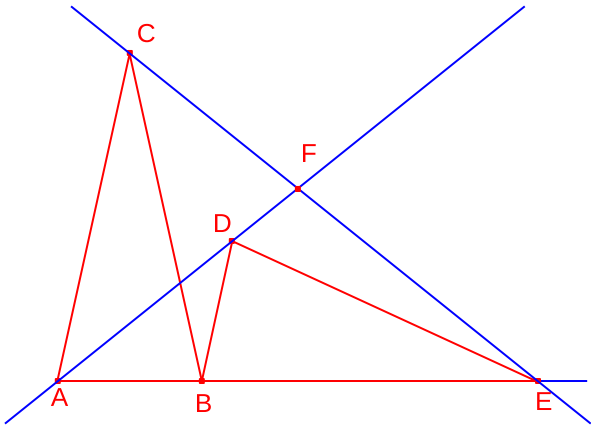
Solució:
Siguen els rectangles iguals $ABCD, EFGC$, $\overline{CG}=2, \overline{FG}=x$ i els vèrtexs A, B, G alineats.
Siga K la intersecció dels dos rectangles.
Siga $\overline{BG}=\overline{FK}=a$
$\overline{EK}=\overline{BK}=2-a$
L'àrea del cometa $CEKB$ és igual a la meitat de l'àrea del rectangle $ABCD$:
$x(2-a)=\frac{1}{2}2\cdot x$
Simplificant:
$ax=x$
$a=1$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CBG}$:
$x=\sqrt{3}$
Notem que el rectangle $ABCD$ està girar amb centre C, 30º del rectangle $EFGC$.

3430.- Siguen els triangles isòsceles iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$, amb els vèrtexs A, B, E, alineats. Les rectes AD, CE és tallen en el punt F.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.



Solució:

Siga $\alpha = \angle ABC = \angle DBE$

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}, \overline{AB} = \overline{BD}$ és isòsceles

$\angle DAB = \angle ADB = \frac{1}{2}\alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{CBE}, \overline{BC} = \overline{BE}$ és isòsceles

$\angle BCE = \angle CBE = \frac{1}{2}\alpha$

Aleshores:

$\angle FAE = \angle AEF = \frac{1}{2}\alpha$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.