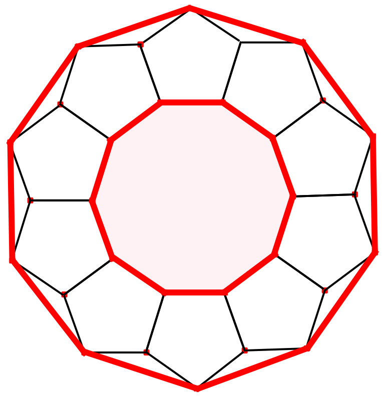
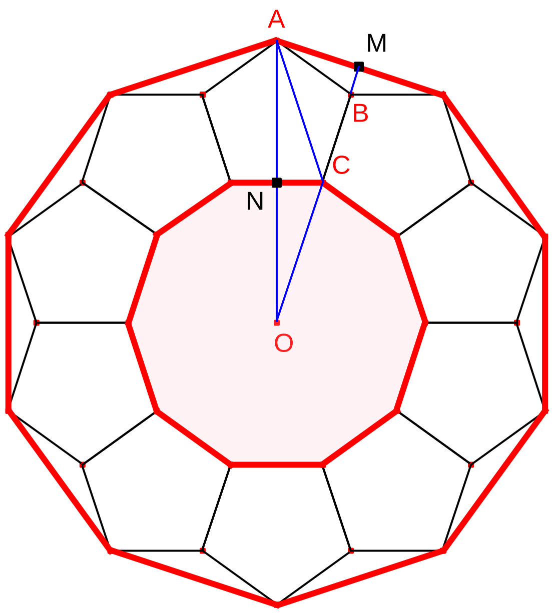
Problemes de Geometria per a l'ESO 344

3431.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos decàgons regulars.



Solució:



$AB=BC=1$

$Phi=(1+\sqrt{5})/2$

$BM=1/(2Phi)$

$OC=Phi$

$OM=1+Phi+1/(2Phi)$

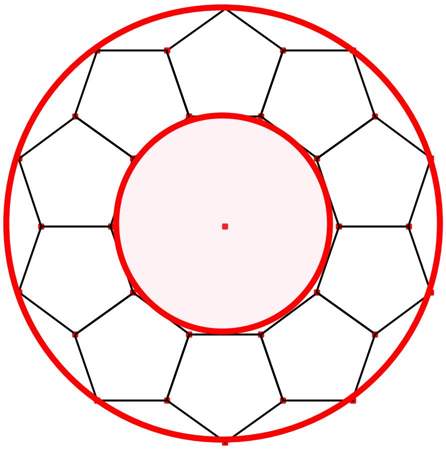
$OM^2=(10+15\cdot Phi)/4$

$ON^2=Phi^2-1/4=(3+4Phi)/4$

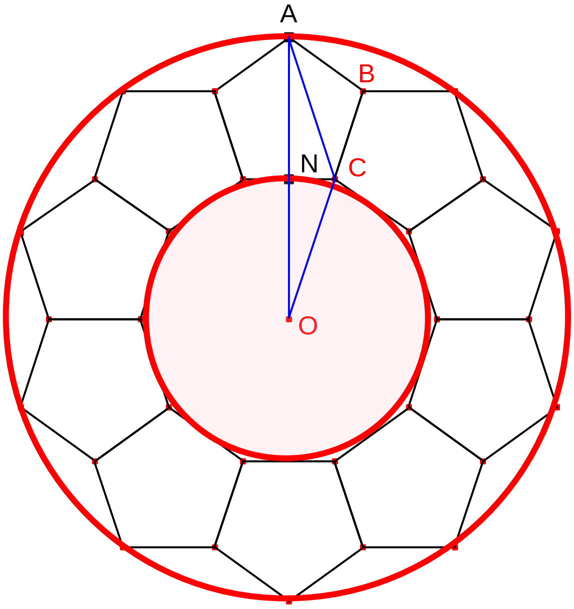
Proporció àrees:

$OM^2/ON^2=(5+\sqrt{5})/2=2+Phi$

3432.- En la figura, calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



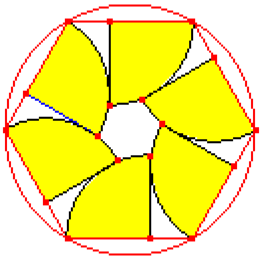
Solució:



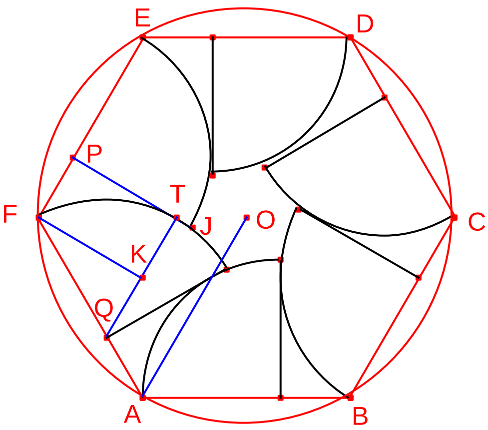
AB=BC=1
AC=OC=Phi
ON=AN

Proporció àrees:
$OA^2/ON^2=4$

3433.- Sobre els costats d'un hexàgon regular s'han dibuixat sis quadrants tangents.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrants i l'àrea del cercle circumscrit a l'hexàgon regular.



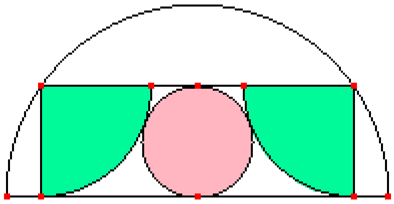
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
El radi de la circumferència circumscrita és $\overline{OA} = c$
Siga el quadrant de centre Q i radi $\overline{QF} = r$
Siga T el punt de tangència amb el radi del quadrant contigu de centre P i el radi $\overline{PJ} = r$
$\angle FQT = 60°$
El triangle $\overset{\Delta}{FQT}$ és equilàter
Siga K la projecció de F sobre $\overline{QT}$



$\overline{QR} = \overline{KT} = \overline{PF} = \frac{1}{2}r$
$\overline{PF} = c - r$
$r = \frac{2}{3}c$

La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{C_{cercle}} = \frac{6 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2}{\pi c^2} = \frac{2}{3}$$

3434.- La figura està formada per un rectangle inscrit en un semicercle i un cercle i dos quadrants interiors al rectangle.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle.

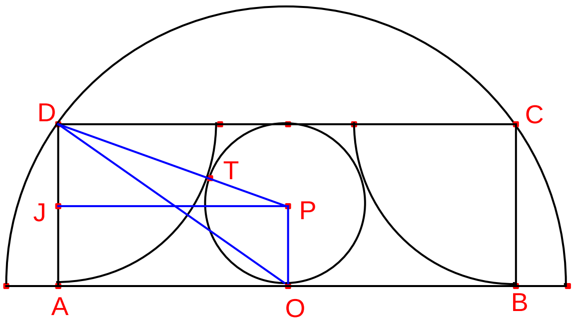


Solució:
Siga el quadrant de centre D i radi $\overline{DA} = r$
Siga el cercle de centre P i radi $\overline{PO} = \frac{1}{2}r$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OD} = R$
Siga J la projecció de P sobre $\overline{AD}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DJP}, \overset{\Delta}{DAO}$:

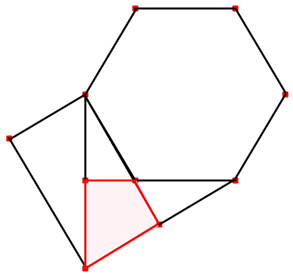
$$\overline{JP}^2 = \left(\frac{3}{2}r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}r\right)^2 = 2r^2$$
$$\overline{OA}^2 = R^2 - r^2$$

Igualant les expressions:
$$2r^2 = R^2 - r^2$$
$$3r^2 = R^2$$

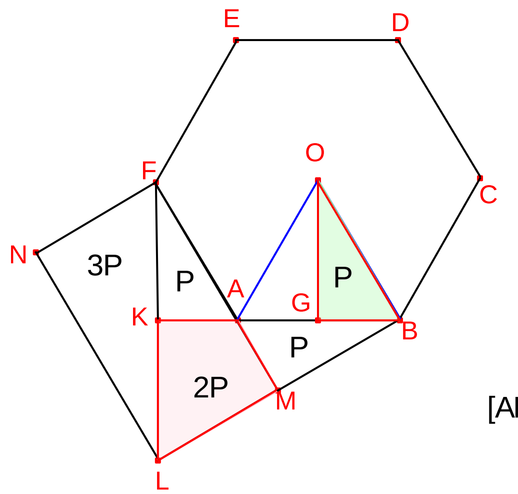
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 + \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{\frac{3}{4}r^2}{\frac{1}{2}3r^2} = \frac{1}{2}$$



3435.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea total de la figura.



Solució:



AB=1

[OGB]=P

FM=sqrt(3)/2

[LNF]=3P

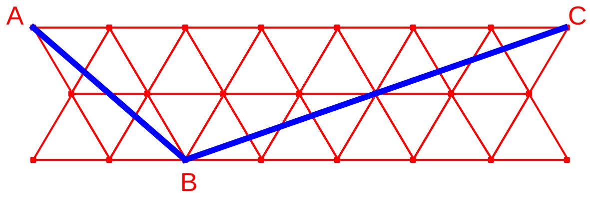
[ABCDEF]=12P

[AKLM]=2P

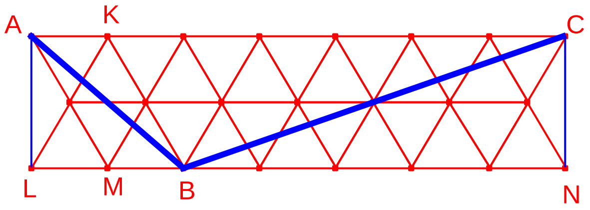
[total]=22P

[AKLM]/[total]=1/11

3436.- La figura està formada per triangles equilàters.
Calcular la mesura de l'angle $x = \angle ABC$



Solució:



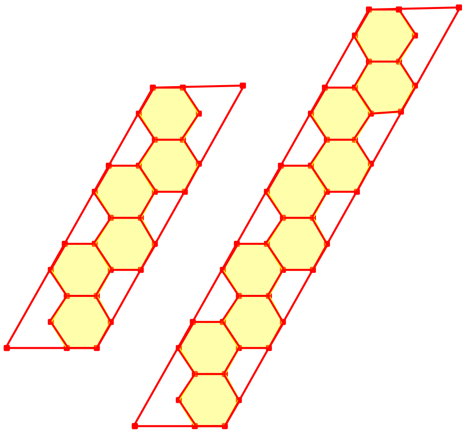
Siga $\overline{AK} = \overline{LM} = 1, \overline{AM} = 2$
$\overline{AL} = \overline{CN} = \sqrt{3}$

Siga $\angle ABL = \alpha, \angle CBN = \beta$
$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

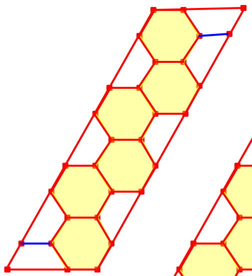
$$\tan x = \tan\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}} = -\sqrt{3}$$

$x = 120°$

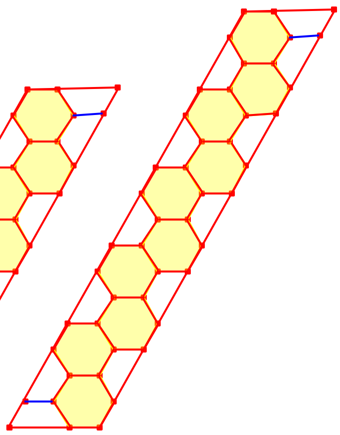
3437.- En cadascun dels paral·lelograms s'han inscrit hexàgons regulars.
Calculeu el límit de la proporció entre l'àrea dels hexàgons i l'àrea del paral·lelogram



Solució:



6/(6+4)



(4n+2)/(6n+4)

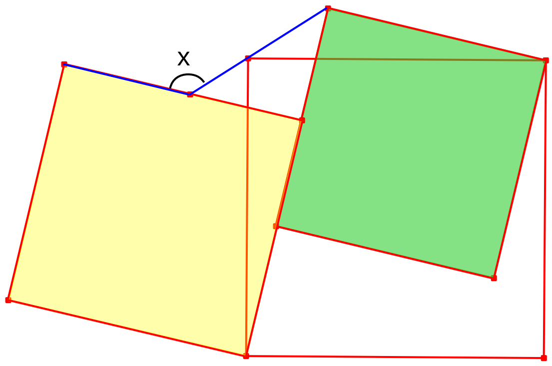
10/(10+6)

La proporció entre les àrees del paral·lelogram de la posició n és:

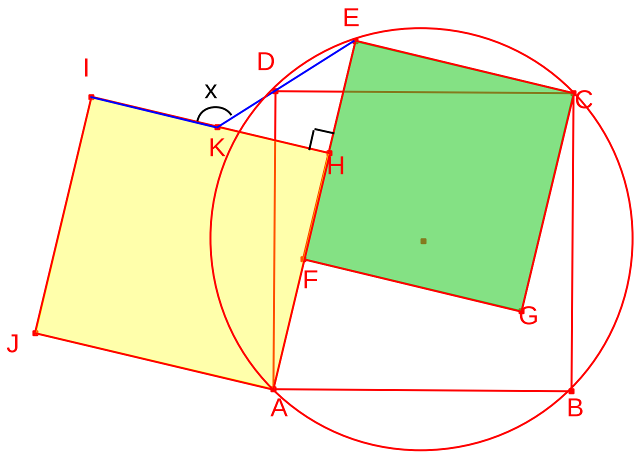
$$\frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\frac{2}{3}$$

3438.- La figura està formada per tres quadrats.
Determineu la mesura de l'angle x



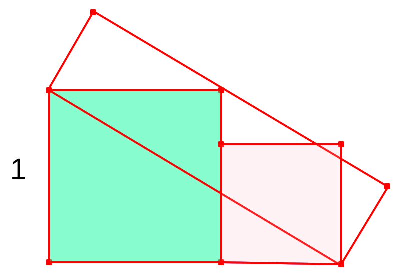
Solució:



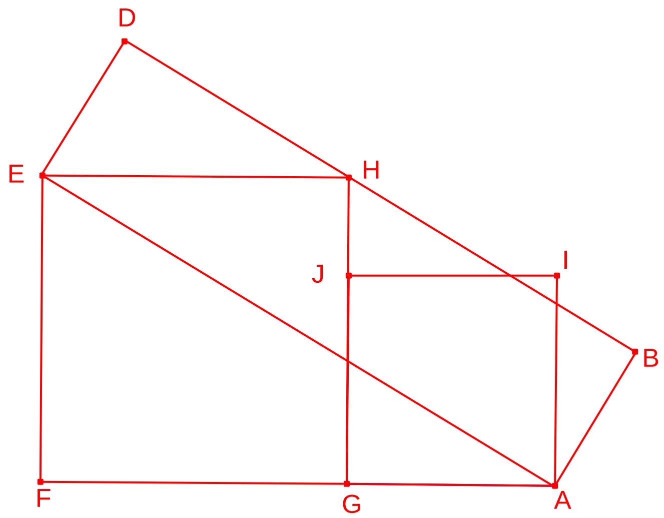
ABCED inscripltible

angle DEA=45º
x=135º

3439.- La figura està formada per dos quadrats, el de l'esquera de costat 1,i un rectangle.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:



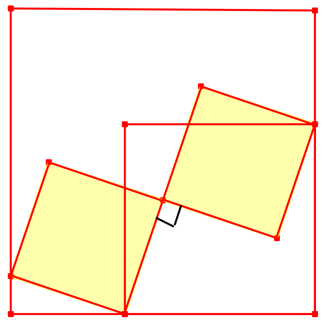
EF=1

EDH, EFA semblants

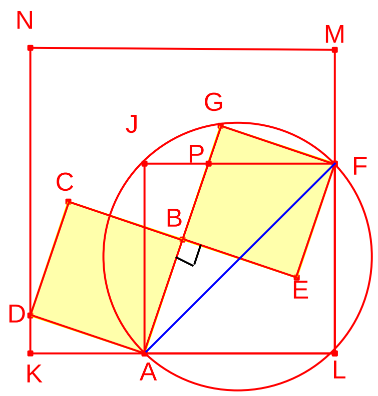
DE/1=1/AE

AE·DE=1

3440.- La figura està formada per dos quadrat iguals ombrejats i de costats perpendiculars i altres dos quadrats.
Calculeu la proporció entre l'àrea dels dos quadrats ombrejats i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:
Siguen el quadrats iguals $ABCD, BEFG$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $ALFJ$
Siga el quadrat exterior $KLMN$
Siga $\alpha = \angle KAD = \angle JAP = \angle PFG$
El quadrilàter $AFGJ$ és cíclic ja que $= \angle AJF = \angle AGF = 90°$



$\overline{AF} = \sqrt{5}$
$$\overline{AJ} = \overline{FJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$$\overline{AL} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
$\angle FAJ = 45° - \alpha$
$$\tan(45° - \alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{3}, \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\overline{AK} = \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$
$$\overline{KL} = \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{2 \cdot S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{2}{\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{5}{16}$$