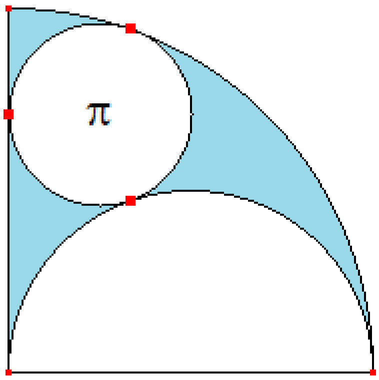
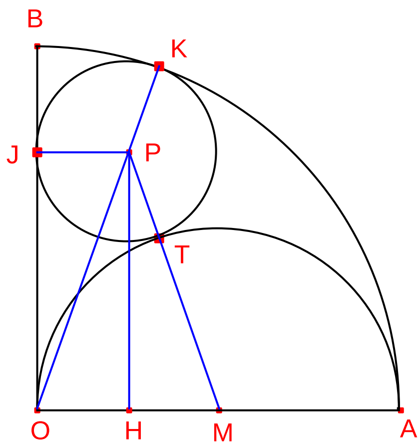
3441.- La figura està formada per un quadrant, un semicercle i un cercle 'àrea π.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

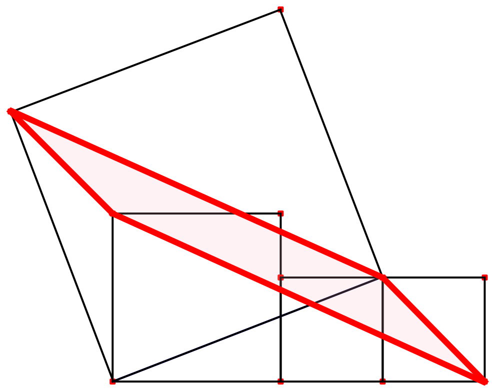


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2r$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MO} = r$
Siga el cercle de centre P radi $\overline{PJ} = \overline{PK} = \overline{PT} = s$ i àrea π.
$\pi s^2 = \pi$
$s = 1$

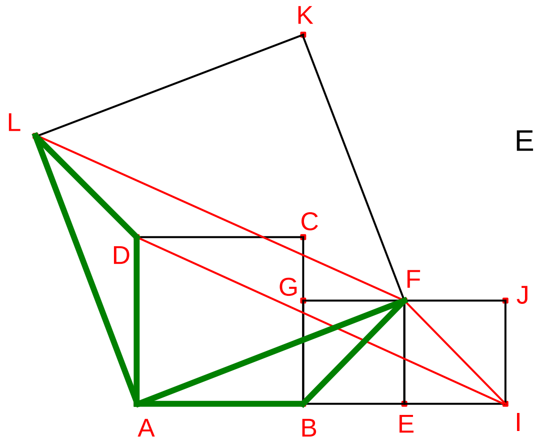
Siga H la projecció de P sobre $\overline{OA}$
$\overline{OP} = 2r - 1, \overline{MP} = r + 1, \overline{OH} = 1, \overline{HM} = r - 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{OHP}, \overset{\Delta}{MHP}$:
$\overline{HP}^2 = 4r^2 - 4r$
$\overline{HP}^2 = 4r$
$4r^2 - 4r = 4r$
$r = 2$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrant menys la suma de les àrees del cercle i del semicercle:
$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi 4r^2 - \left(\pi + \frac{1}{2}\pi r^2\right) = \pi$



3442.- La figura està formada per quatre quadrats.
Proveu que el quadrilàter ombrejat és un paral·lelogram.



Solució:



Els triangles ABF i ADL són iguals (CAC)

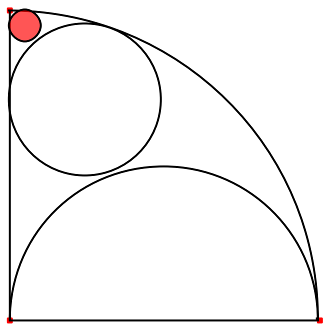
Aleshores, DL=BF=FL

angle ADL=angle ABF=135º

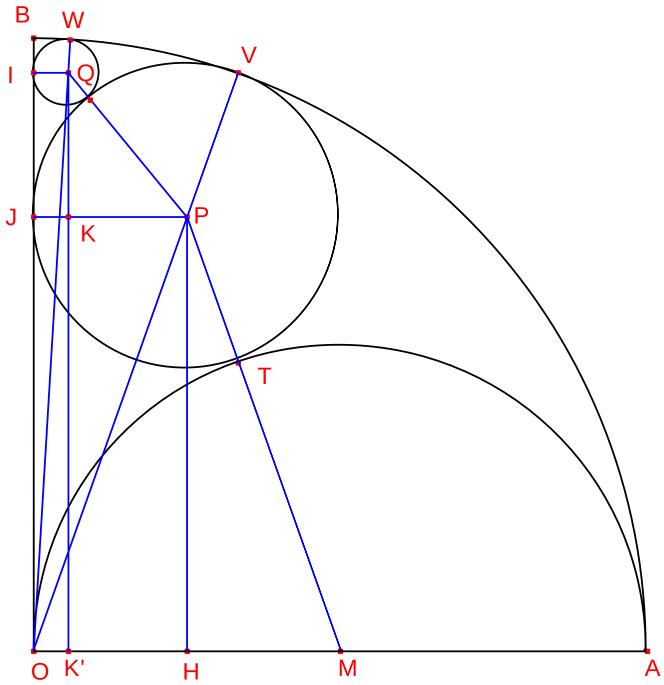
FI, DL són paral·lels

LDIF és un paral·lelogram

3443.- La figura està formada per un quadrant, un semicercle i dos cercles.
Calculeu proporció entre l'àrea del cercle ombrejat i l'àrea del quadrant.



Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = 2r$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{MO} = r$
Siga el cercle de centre P radi $\overline{PJ} = \overline{PK} = \overline{PT} = s$

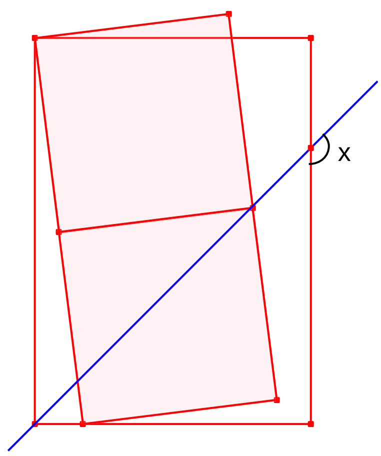


Siga H la projecció de P sobre $\overline{OA}$
$\overline{OP} = 2r - s, \overline{MP} = r + s, \overline{OH} = 1, \overline{HM} = r - s$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{OHP}, \overset{\Delta}{MHP}$:
$\overline{HP}^2 = 4r^2 - 4rs$
$\overline{HP}^2 = 4rs$
$4r^2 - 4rs = 4rs$
$s = \frac{1}{2}r$
$\overline{HP} = r\sqrt{2}$

Siga el cercle de centre Q radi $\overline{QI} = \overline{QW} = t$
Siga K la projecció de Q sobre $\overline{PJ}$
Siga K' la projecció de Q sobre $\overline{OA}$
Siga $a = \overline{KQ}$
$K'Q = r\sqrt{2} + a$
$\overline{QP} = s + t, \overline{OQ} = 2r - t, \overline{PK} = s - t,$
$\overline{OK'} = 2r - t$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{OK'Q}, \overset{\Delta}{PKQ}$:
$(2r - t)^2 = \left(a + r\sqrt{2}\right)^2 + t^2$
Simplificant:
$2r^2 - 4rt = a^2 + 2\sqrt{2}ar$
$(s + t)^2 = (s - t)^2 + a^2$
Simplificant:
$2rt = a^2$
$r - 3t = a\sqrt{2}$
Elevant al quadrat:
$a^2 = \frac{r^2 + 9t^2 - 6rt}{2}$
$\frac{r^2 + 9t^2 - 6rt}{2} = 2rt$
$9t^2 - 10rt + r^2 = 0$
$t = \frac{1}{9}r$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{quadrant}} = \frac{\pi \frac{1}{81} r^2}{\frac{1}{4}\pi(2r)^2} = \frac{1}{81}$$

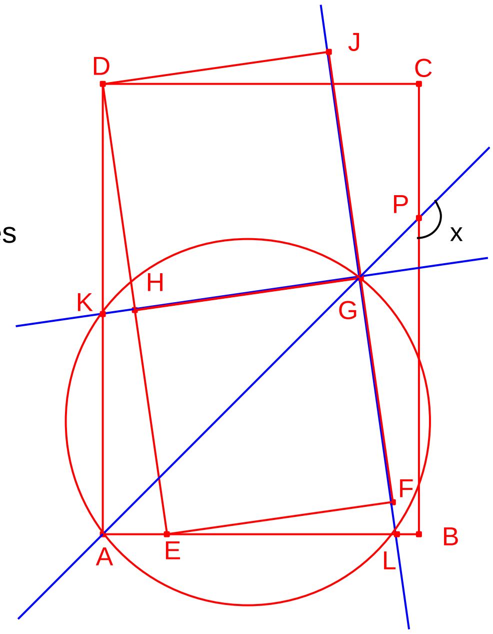
3444.- La figura està formada per un rectangle i dos quadrats iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



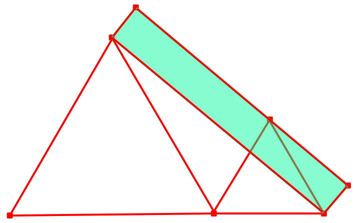
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$.
Siguen els quadrats $EFGH, HGJD$
Siga P la intersecció de ka recta AG i $\overline{BC}$
$\angle ADE = \angle BEF$

Aleshores, els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{H}K, E\overset{\Delta}{F}L$
Aleshores, $\overline{KH} = \overline{FL}$
El quadrilàter $ALGK$ és cíclic ja que té dos els angles oposats rectes.
$\angle GAL = \angle GKL = 45°$

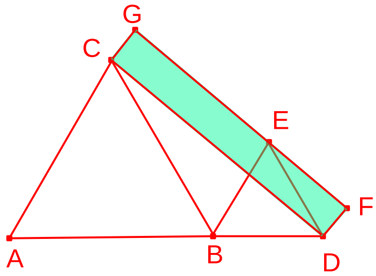
$\angle APB = \angle PAB = 45°$
$x = 135°$



3445.- La figura està formada per dos triangles equilàters (el de la dreta té àrea 4) i un rectangle. Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució 1:



Siguen els triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDE}$ de costat $\overline{BD} = b$ i àrea 4.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 4$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CBD}$:

$$\overline{CD}^2 = a^2 + b^2 + ab$$

Siga $\angle BDC = \beta$

$\angle CDE = \angle DEF = 60° - \beta$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

$$\sin\beta = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}, \cos\beta = \frac{a+2b}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$$

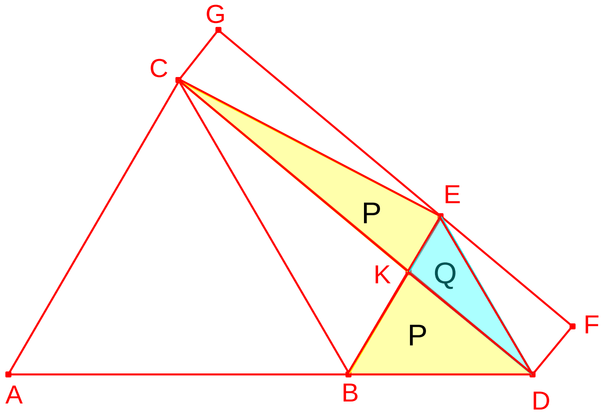
$$\sin(60° - \beta) = \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$$

$$\overline{DF} = b \cdot \sin(60° - \beta) = \frac{b^2\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$$

L'àrea del rectangle $CDFG$ és:

$$S_{CDFG} = \overline{CD} \cdot \overline{DF} = \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 = 2 \cdot S_{BCD} = 8$$

Solució 2:



$\overline{BC}, \overline{DE}$ són paral·lels.

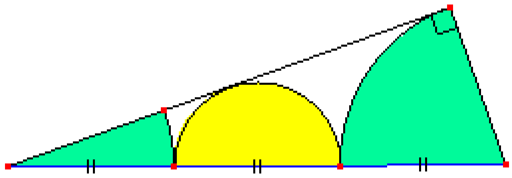
Aleshores en el trapezi CBDE:

$S_{BDK} = S_{CEK} = P$

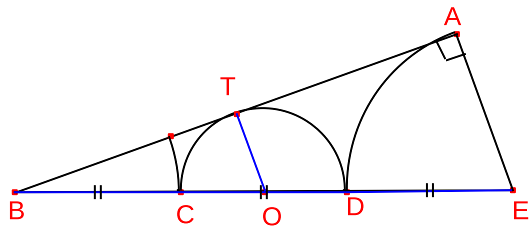
Siga $S_{KDE} = Q$

$S_{CDFG} = 2 \cdot S_{CDE} = 2(P+Q) = 2 \cdot S_{BDE} = 8$

3446.- La hipotenusa d'un triangle rectangle s'ha dividit en tres parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle groc i la suma de les àrees dels sectors verds.
Calculeu la mesura de l'angle agut menor del triangle.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga $\overline{BC} = 6a$
Els dos sectors verds formen un quadrant de radi $2a$
El semicercle central té radi a
La proporció entre les àrees és:

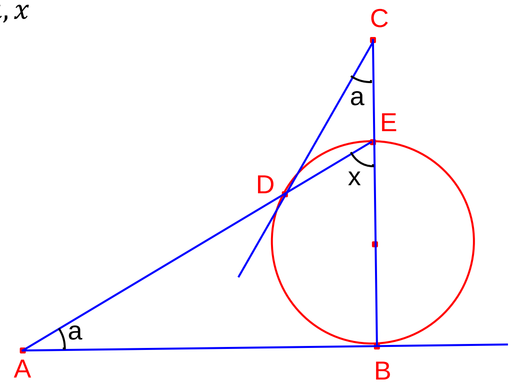
$$\frac{S_{groga}}{S_{verda}} = \frac{\frac{1}{2}\pi a^2}{\frac{1}{4}\pi(2a)^2} = \frac{1}{2}$$

Siga T el punt de tangència del semicercle i el catet $\overline{AB}$
Siga $\alpha = \angle OBT$
$\overline{OT} = a, \overline{BO} = 3a$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTB}$

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19°\,28'16"$$

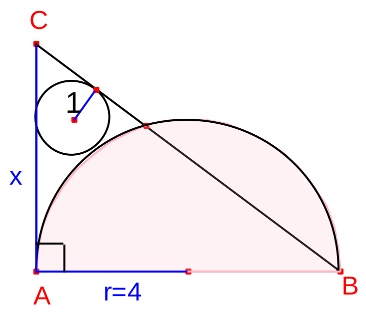
3447.- En la figura calculeu la mesura dels angles a, x



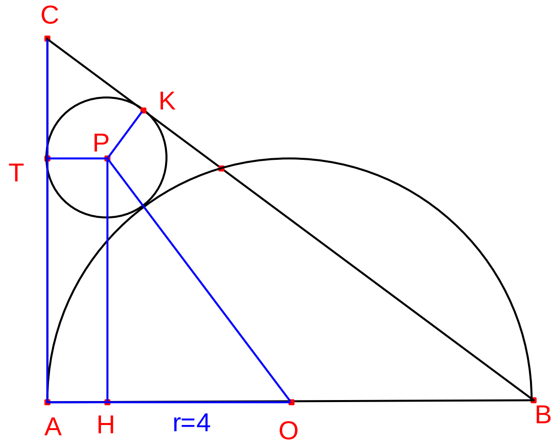
Solució:
Per ser x angle inscrit en la circumferència:
$\widehat{BD} = 2x$
$\widehat{DE} = 180° - 2x$
Per ser a angle exterior a la circumferència:
$$a = \frac{180° - 2x}{2} = 90° - x$$
$$a = \frac{2x - (180° - 2x)}{2} = 2x - 90$$

$90° - x = 2x - 90°$
$3x = 180°$
$x = 60°$
$a = 90° - 60° = 30°$

3448.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 8$
Si la circumferència tangent a la semicircumferència i als costats $\overline{AC}, \overline{BC}$ té radi 1, determineu la mesura del catet $\overline{AC} = x$



Solució:



PK=PT=1

OH=3, OP=5

PH==AT=4

Siga CT=CK=y

teorema Pitàgores PHB

$PB^2=65$

teorema Pitàgores BKP

BK=8

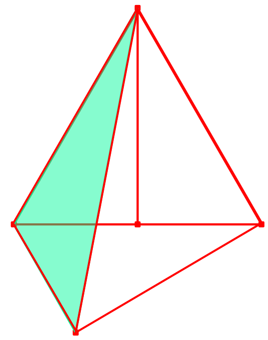
teorema Pitàgores ABC

$(4+y)^2+8^2=(8+y)^2$

y=2

x=4+2=6

3449.- La figura, està formada per tres triangles rectangles iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del tres triangles rectangles.

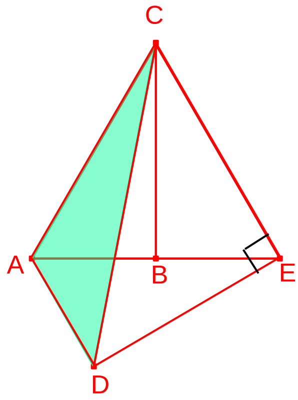


Solució:

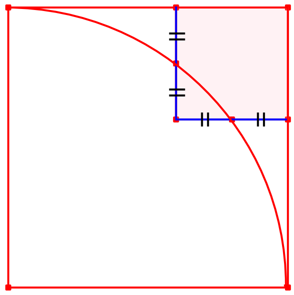
Siguen els triangles rectangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{EBC}$
Siga $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BE} = a$
$\overline{AE} = 2a = \overline{AC} = \overline{CE}$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és equilàter.
Aleshores:
$\angle CED = 90°$
$\overline{DE} = a\sqrt{3}$
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ADEC}} = \frac{3 \cdot S_{ADE} - S_{DEC}}{3 \cdot S_{ADE}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2 - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot 2a}{3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{3}$$



2450.- La figura està formada per dos quadrats i un quadrant.
El quadrant divideix dos costats del quadrat en dos parts iguals.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $CEFG$ de costat $\overline{CE} = 2a$
Siga K la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$
$\overline{AM} = 1, \overline{AK} = 1 - 2a, \overline{KM} = 1 - a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKM}$:
$1 = (1 - 2a)^2 + (1 - a)^2$
$5a^2 - 6a + 1 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \frac{1}{5}$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{CEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{(2a)^2}{1} = \frac{4}{25}$