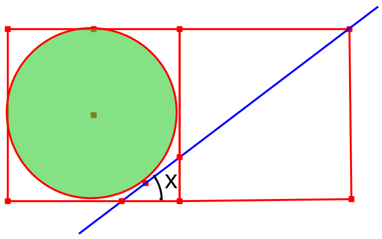
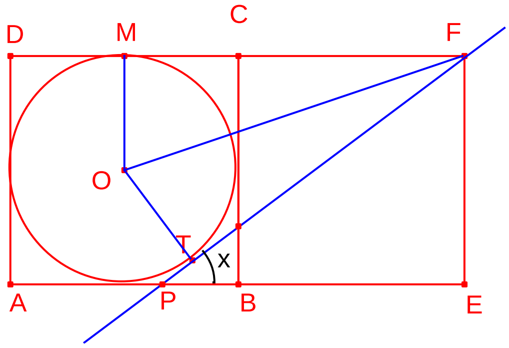
3451.- La figura està formada per dos quadrats, una circumferència inscrita en un quadrat i una recta tangent a la circumferència.
Determineu la mesura de l'angle $x$




Solució:




Siguen els quadrats $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $x = \angle FPE$

$\angle MFO = \frac{1}{2}x$

$\overline{OM} = \frac{1}{2}, \overline{FM} = \frac{3}{2}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

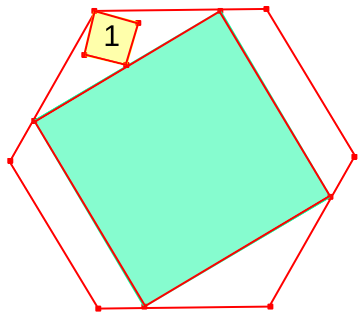
$\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$

$\tan x = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$

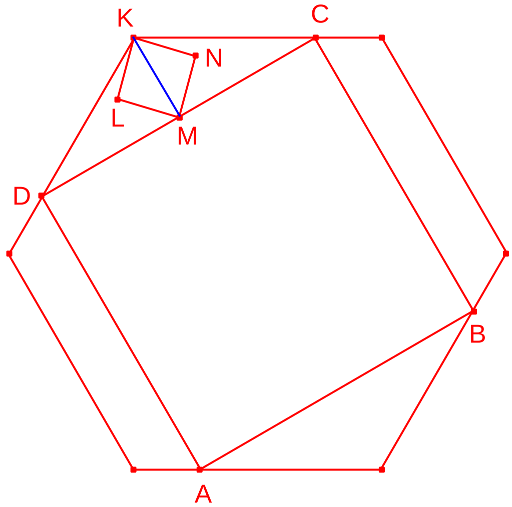
$x = \arctan\frac{3}{4} \approx 36° 52'12''$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$ es $3 : 4 : 5$

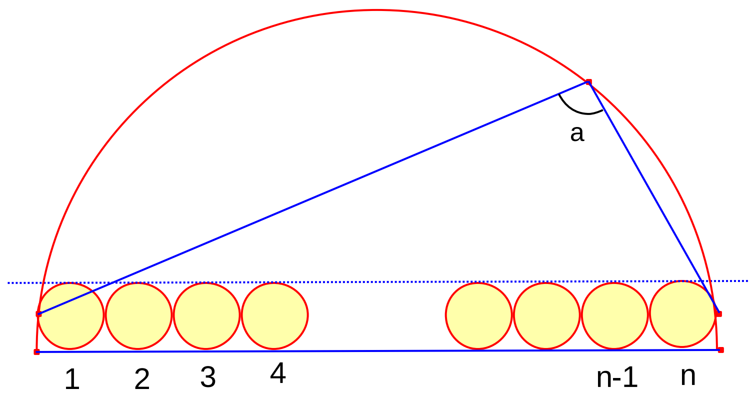
3452.- En l’interior d’un hexàgon regular s’ha dibuixat dos quadrats.
L’àrea del menor quadrat és 1.
Calculeu l’àrea del quadrat gran.



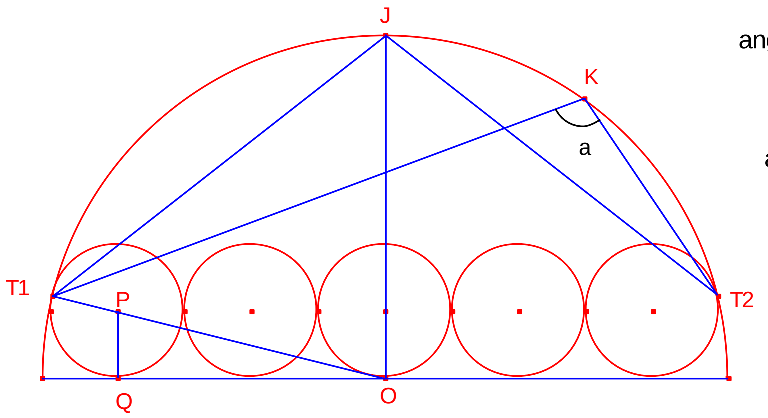

Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $KLMN$ d’àrea 1.
$\overline{KM} = \sqrt{2}$
$\overline{DK} = 2 \cdot \overline{KM} = 2\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMK}$:
$\frac{1}{4}c^2 = 8 - 2 = 6$
L’àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = c^2 = 24$



3453.- En la figura, sobre el diàmetre de la semicircumferència s'han dibuixat n circumferències igual i tangent al diàmetre i la primera i última tangents a la semicircumferència.
Determineu $\tan a$




Solució:

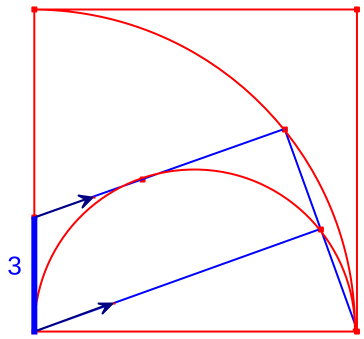



angleT1KT2=angleT1JT2=a
angle T1JO=a/2

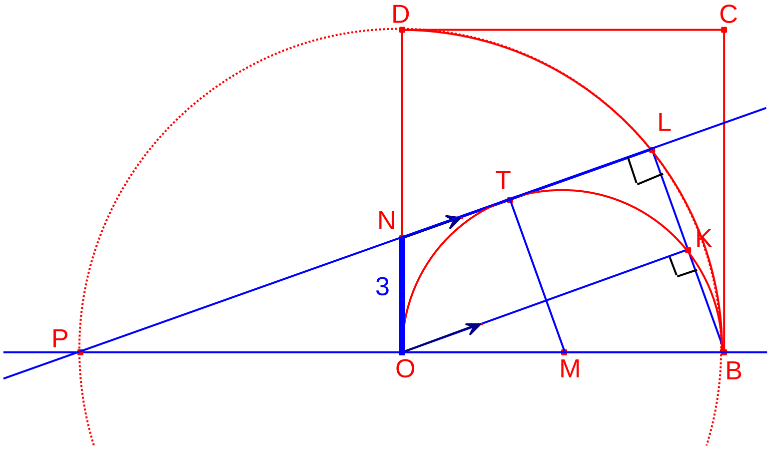
angleT1OJ=180º-a
angle QPO=180º-a

PQ=1
OQ=(n-1)
tan a=n-1

3454.- La figura està formada per un quadrat, un quadrant i un semicercle.
La tangent i la corda del semicercle són paral·leles.
Calculeu l’àrea del quadrat.

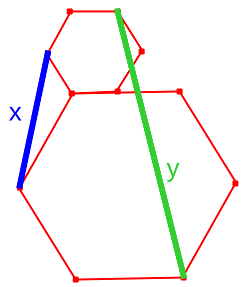



Solució:

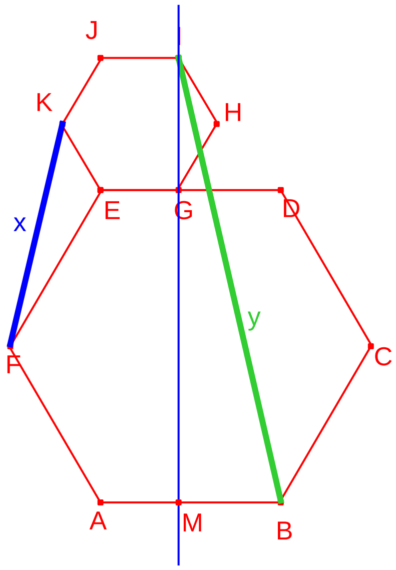



Siga el semicercle de centre $M$ i diàmetre $\overline{OB} = 2r$
Siga $T$ el punt de tangència del semicercle i la recta $\overline{LN}$
Siga $\overline{ON} = 3$
$\angle OKB = 90°$
Aleshores, $\angle NLB = 90°$
Aleshores $\overline{PM}$ és un diàmetre.
Siga el quadrat $OBCD$ de costat $\overline{OB} = 2r$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTM}, \overset{\Delta}{PON}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{r}{3} = \frac{3r}{\sqrt{4r^2+9}}$$
$$\sqrt{4r^2+9} = 9$$
$$4r^2 = 72$$
L’àrea del quadrat $OBCD$ és:
$$S_{OBCD} = 4r^2 = 72$$

3455.- Donats els hexàgons regulars de la figura, calculeu la proporció
$\frac{x}{y}$



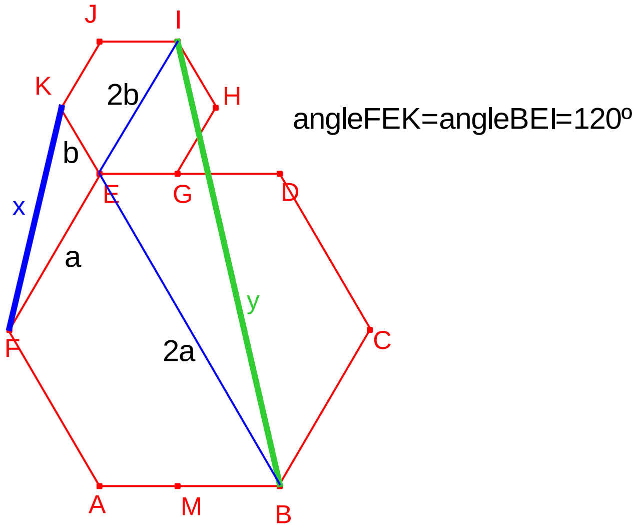

Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = a$
Siga l'hexàgon regular $EGHIJK$ de costat $\overline{EG} = b$
Siga $M$ la projecció de $G$ sobre $\overline{AB}$
Siguen $x = \overline{FK}, y = \overline{BI}$




Aplicant el teorema del cosinus a triangle $\overset{\Delta}{FEK}$:
$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

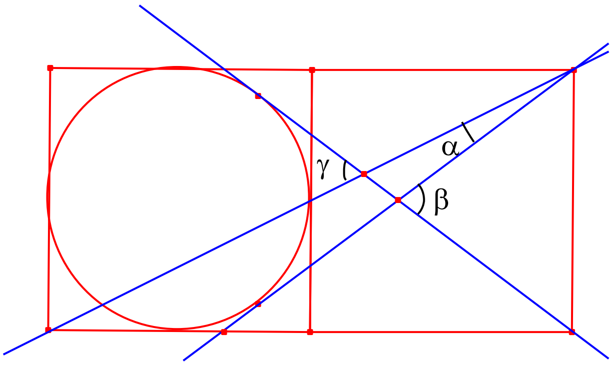
$\overline{BM} = a - b, \overline{MI} = (a + b)\sqrt{3}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IMB}$
$y^2 = (a - b)^2 + \left((a + b)\sqrt{3}\right)^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab)$
$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{4}$
$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

Solució 2:

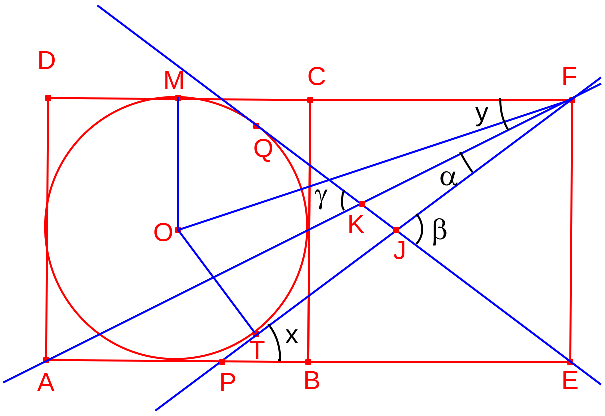



Els triangles $\overset{\Delta}{FEK}, \overset{\Delta}{BEI}$ són semblants i de raó $1 : 2$
$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

3456.- La figura està formada per dos quadrats, una circumferència inscrita en un quadrat i una recta tangent a la circumferència.
Calculeu $\tan\alpha$ , $\tan\beta$ , $\tan\gamma$




Solució:

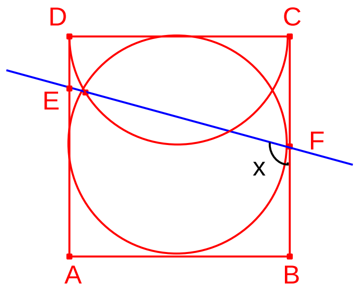



Siguen els quadrats $ABCD, BEFC$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga $x = \angle FPE$
$\angle MFO = \frac{1}{2}x$
$\overline{OM} = \frac{1}{2}, \overline{FM} = \frac{3}{2}$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$
$\tan x = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$
Siga $y = \angle AFD$
$\tan y = \frac{1}{2}$
$\alpha = x - y, \beta = 2x, \gamma = x + y$
$\tan\alpha = \tan(x-y) = \frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{11}$
$\tan\beta = \tan 2x = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$
$\tan\gamma = \tan(x+y) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}} = 2$

3457.- Siga el quadrat $ABCD$, la circumferència inscrita i la semicircumferència de diàmetre $\overline{DE}$

Siga $F$ el punt mig del costat $\overline{BC}$

Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle EFB$




Solució:

Siga $O$ el centre del quadrat.

La circumferència i el semicercle tenen el mateix radi.

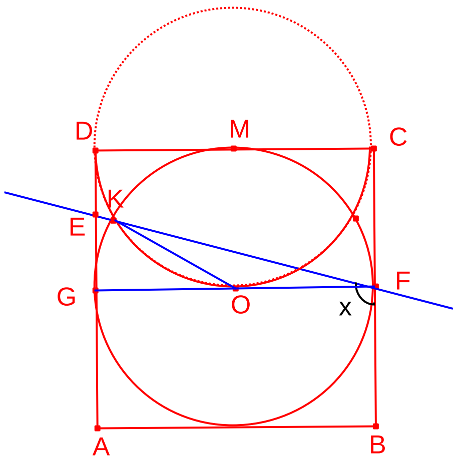
Siga $K$ la intersecció de la circumferència i el semicercle.

$\overline{OK} = \overline{OM} = \overline{MK} = \overline{OF}$

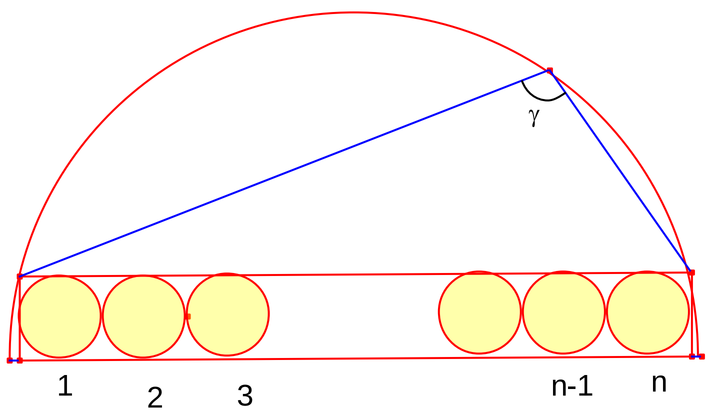
$\angle GOK = 30°$

$\angle OFK = 15°$

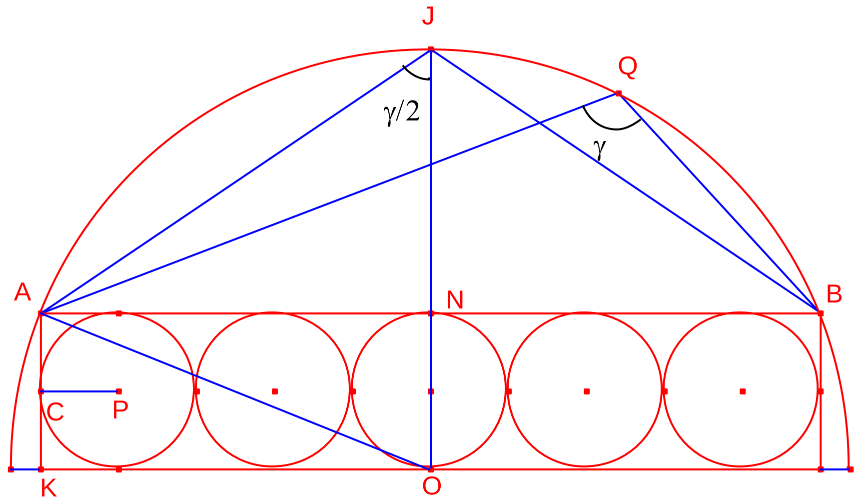
$x = \angle EFB = 105°$



3458.- En la figura, sobre el diàmetre de la semicircumferència s'han dibuixat n circumferències igual i tangents a un rectangle.
Calculeu $\tan\gamma$




Solució:




Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PC} = 1$
Siga La semicircumferència de centre O.
$\overline{OK} = n, \overline{AK} = 2$
$\overline{OA} = \overline{OJ} = \sqrt{n^2+4}$
Siga $\gamma = \angle AQB$

$$\angle AJN = \frac{\gamma}{2}$$

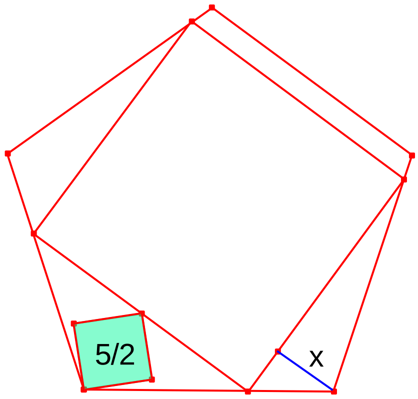
$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}-2} = \frac{\sqrt{n^2+4}-2}{n}$$

$$\tan\gamma = \frac{2\frac{\sqrt{n^2+4}-2}{n}}{1-\left(\frac{\sqrt{n^2+4}-2}{n}\right)^2} = -\frac{n}{2}$$

3459.- En la figura dins d'un pentàgon regular s'han dibuixat dos quadrats.

El menut té àrea $\frac{5}{2}$

Calculeu la mesura $x$




Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga el quadrat $EFGH$ d'àrea $\frac{5}{2}$

$\overline{EG} = \sqrt{5}$

$\angle EBG = 36°, \angle CBJ = 54°, \angle BCJ = 18°$

$\tan 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}, \tan 36° = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

Siga $y = \overline{BK}$

$y = x \cdot \tan 36°$

$c = 2\sqrt{5} \cdot \tan 54°$

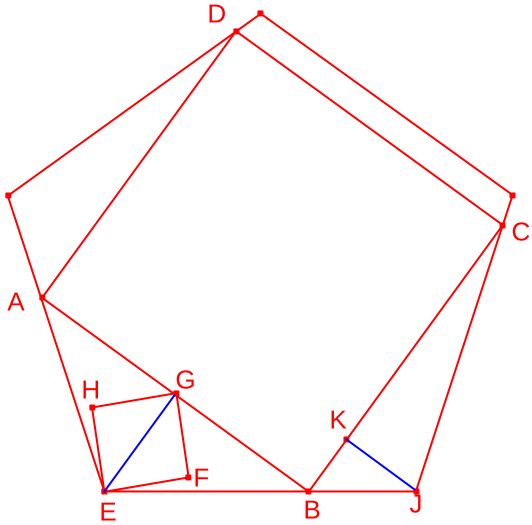
$\dfrac{x}{c-y} = \tan 18°$

$\dfrac{x}{2\sqrt{5} \cdot \tan 54° - x \cdot \tan 36°} = \tan 18°$

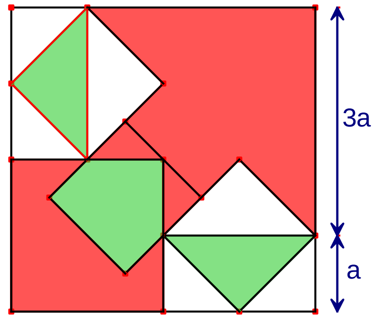
$x = 2\sqrt{5} \cdot \tan 54° \cdot \tan 18° - x \cdot \tan 36° \cdot \tan 18°$

$x = 2 - x\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

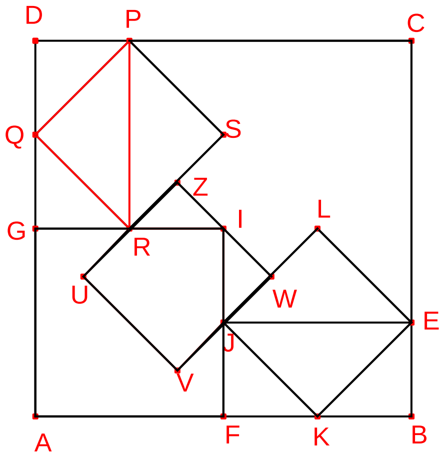
$x = \dfrac{2}{1+\sqrt{9-4\sqrt{5}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



3460.- La figura està formada per cinc quadrats. Determineu la proporció entre l'àrea verda i l'àrea roja.




Solució:




Siga $\overline{BE} = a, \overline{CE} = 3a$
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 4a$
Siga el quadrat $AFIG$ de costat $\overline{AF} = 2a$
Siguen els quadrats iguals $JKEL, UVWZ, PQRS$ de costat $\overline{JK} = a\sqrt{2}$
L'àrea blanca és:
$S_{blanca} = 4a^2$
L'àrea verda és:

$$S_{verda} = 2S_{JKE} + S_{UVJIR} = 2a^2 + \frac{3}{2}a^2 = \frac{7}{2}a^2$$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 16a^2$
L'àrea roja és:

$$S_{roja} = S_{ABCD} - (S_{blanca} + S_{verda}) = 16a^2 - \left(4a^2 + \frac{7}{2}a^2\right) = \frac{17}{2}a^2$$

La proporció entre les àrees de la zona verda i la roja és:

$$\frac{S_{verda}}{S_{roja}} = \frac{\frac{7}{2}a^2}{\frac{17}{2}a^2} = \frac{7}{17}$$