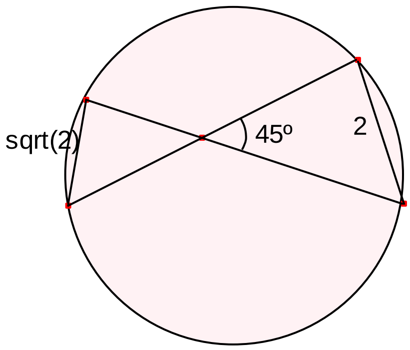
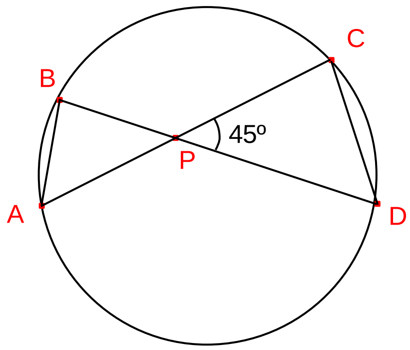
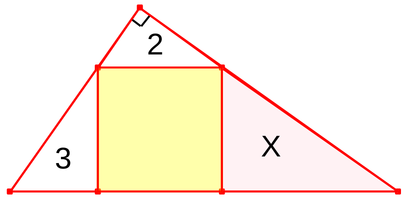
3461.- En la circumferència dos cordes mesuren $2, \sqrt{2}$
Les altres dues cordes formen un angle de $45°$
Calculeu l'àrea del cercle.



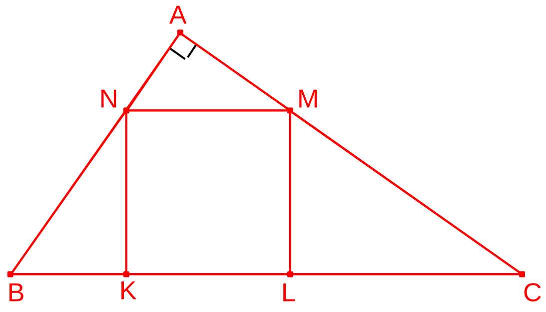
Solució:
Siguen les cordes $\overline{AB} = \sqrt{2}, \overline{Cd} = 2$
Siga P la intersecció de les cordes $\overline{AC}, \overline{BD}$
Siguen $\overline{CP} = a, \overline{DP} = b$
Els triangles $P\overset{\Delta}{C}D, P\overset{\Delta}{B}A$ són semblants i de raó $2 : \sqrt{2}$
Aleshores:
$\overline{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \overline{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $B\overset{\Delta}{P}C$:
$\overline{BC}^2 = \frac{5}{2}a^2$
Siga $\beta = \angle BCA$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $B\overset{\Delta}{P}C$:
$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}a}{\sin 135°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sin\beta}$$
$$\sin\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
Siga R el radi del cercle.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $A\overset{\Delta}{B}C$:
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\beta} = 2R$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 2R$$
$R = \sqrt{5}$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi R^2 = 5\pi$



3462.- En un triangle rectangle s'ha inscrit un quadrat amb un costat sobre la hipotenusa que divideix el triangle en tres triangles d'àrees 3, 2, X. Calculeu l'àrea X.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c$
Siga $\overline{BK} = k$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKN}, \overset{\Delta}{NAM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales, les àrees són proporcionals als quadrats dels costats corresponents.

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \overline{AM} = \frac{\sqrt{6}}{3}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NAM}$

$$c^2 = \frac{2}{3}c^2 + \frac{2}{3}k^2$$

$$\frac{c}{k} = \sqrt{2}$$

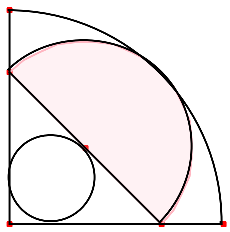
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKN}, \overset{\Delta}{MLC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales, les àrees són proporcionals als quadrats dels costats corresponents.

$$\frac{X}{3} = \left(\frac{c}{k}\right)^2 = 2$$

Aleshores:

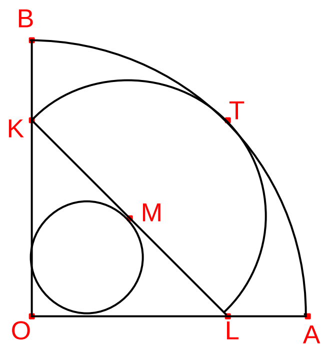
$$X = 6$$

3463.- La figura està formada per un quadrant un semicercle i un cercle.
Calculeu la proporció entre l'àrea del semicercle i l'àrea del quadrant.

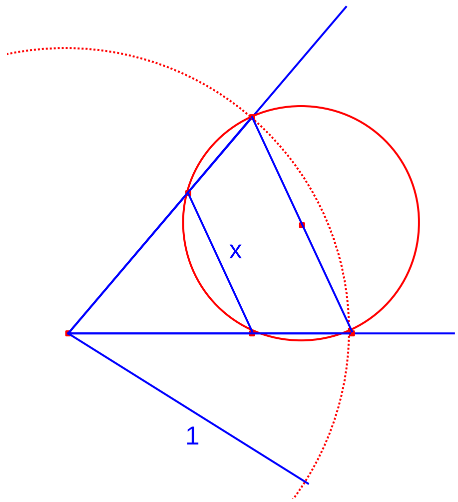


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = R$
Siga el semicercle de centre M i radi $\overline{ML} = \overline{MT} = r$
$\overline{ML} = \overline{MO} = r$

$2r = R$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{semicerccle}}{S_{quadrant}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{2r^2}{4r^2} = \frac{1}{2}$$



3464.- En la figura, calculeu el valor màxim de la mesura del segment x



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{OPQ}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OA}}{1}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{OAB}, \overset{\Delta}{MQB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{1-\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\frac{\overline{PQ}}{2}}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{1-\overline{OA}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{2}$$

$$\overline{OA} = 1 - \frac{1}{2}\overline{PQ}^2$$

$$x = \overline{OA} \cdot \overline{PQ}$$

$$x = f(\overline{PQ}) = \overline{PQ} - \frac{1}{2}\overline{PQ}^3$$

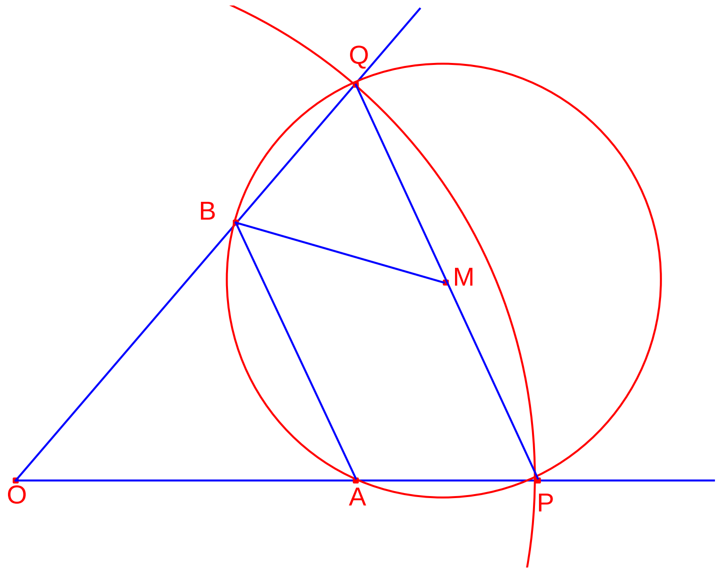
$$f'(\overline{PQ}) = 1 - \frac{3}{2}\overline{PQ}^2$$

$$f'(\overline{PQ}) = 0, \qquad \overline{PQ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

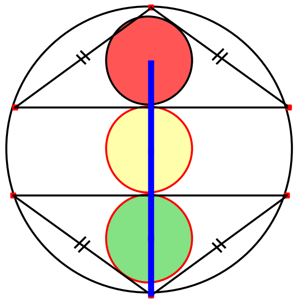
$$f"\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) < 0$$

El valor màxim és:

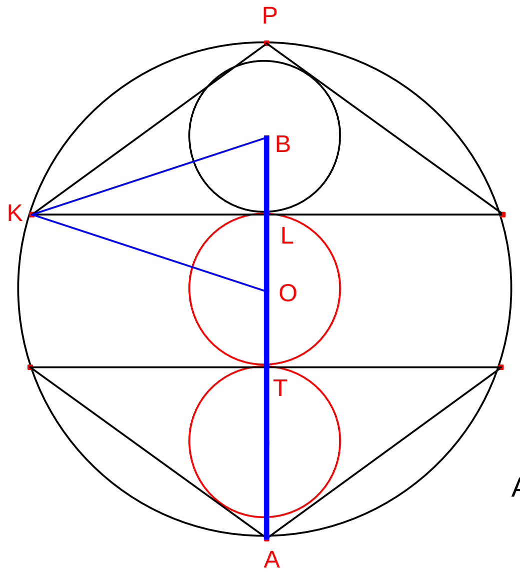
$$x = \frac{2}{9}\sqrt{6}$$



3465.- La circumferència exterior té radi 1
Les tres circumferències de la figura són iguals
Calculeu la mesura del segment blau.



Solució:



OP=OK=BK=1

KL=1-r

OT=r

AB=1+2r

KL=sqrt(1-r²)

a=angleBKL=anglePKB

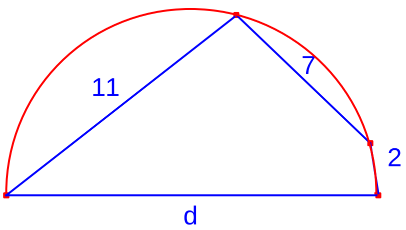
tan a=r/sqrt(1-r²)

tan(2a)=(1-r)/sqrt(1-r²)=(2r/sqrt(1-r²))/(1-r²/(1-r²))

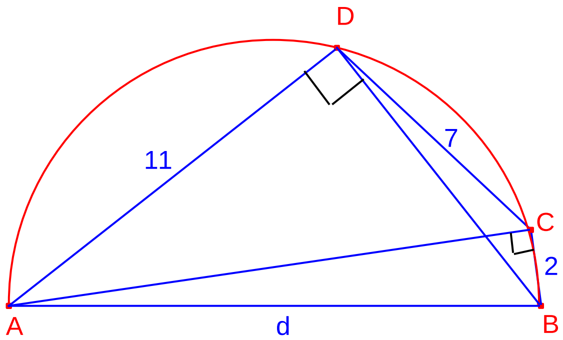
r=(-1+sqrt(5))/4

AB=1+2r=(1+sqrt(5))/2=Phi

3466.- Tres cordes d'una semicircumferència mesuren 11, 7, 2
Calculeu la mesura del diàmetre.



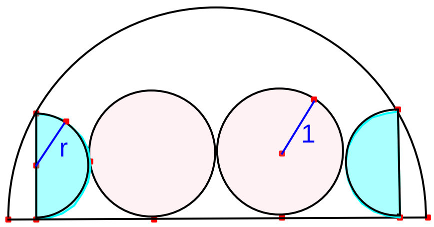
Solució:



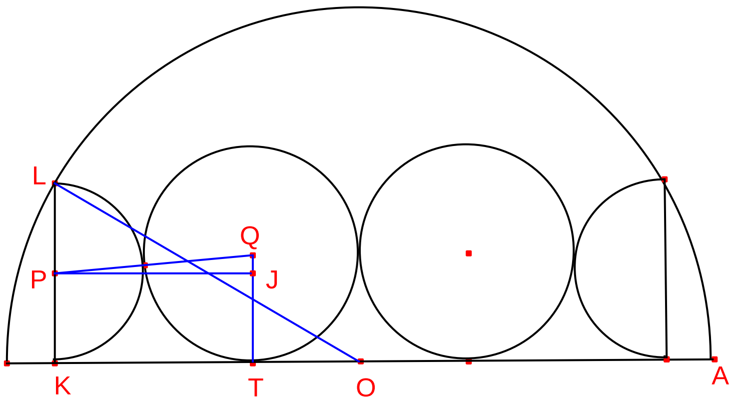
El quadrilàter $ABCD$ és inscriptible en la circumferència de diàmetre $d = \overline{AB}$
Ela angles $\angle ADB = \angle ACB = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}, \overset{\Delta}{ACB}$:
$\overline{BD} = \sqrt{d^2 - 121}, \overline{AC} = \sqrt{d^2 - 4}$
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter $ABCD$:
$7d + 2 \cdot 11 = \sqrt{d^2 - 121} \cdot \sqrt{d^2 - 4}$
$d^3 - 174d - 308 = 0$
$d = 14$

3467.- La figura esta formada per dos cercles unitaris i dos semicercles de radi r (tots tangents) en l'interior del semicercle.
L'àrea de la regió acolorida és la meitat de l'àrea total.
Calculeu la mesura de r.



Solució:



Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT} = 1$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PK} = r$
Siga la semicircumferència de centre O i radi $\overline{OA} = R$

L'àrea ombrejada és igual a la meitat de l'àrea del semicercle de centre O:

$$\pi r^2 + 2\pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$R^2 = 4r^2 + 8$$

Siga J la projecció de P sobre $\overline{QT}$
Siga $a = \overline{OK}$
$\overline{PJ} = a - 1, \overline{PQ} = 1 + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $P\overset{\Delta}{J}K, L\overset{\Delta}{K}O$:

$$4r = a^2 - 2a + 1$$

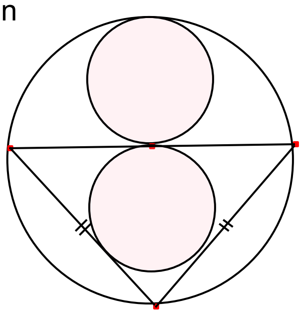
$$R^2 = 4r^2 + a^2$$

$$4r^2 + 8 = 4r^2 + a^2$$

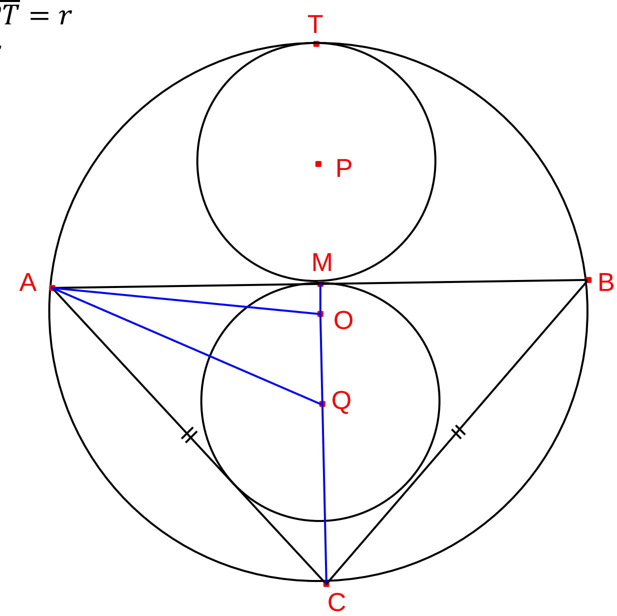
$$a^2 = 8$$

$$r = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{4}$$

3468.- En un cercle s'han dibuixat dos cercles iguals tangents, un d'ells inscrit a un triangle isòsceles.
Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels dos cercles interiors i l'àrea del cercle exterior.



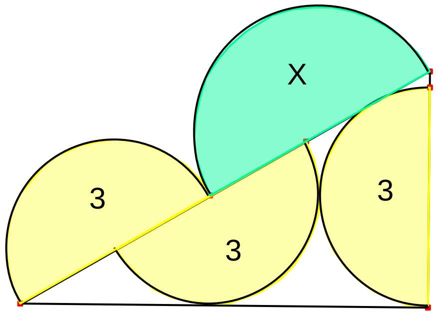
Solució:
Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = \overline{PT} = r$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QM} = r$



$\overline{OM} = R - 2r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{AM} = \sqrt{R^2 - (R-2r)^2} = 2\sqrt{Rr - r^2}$

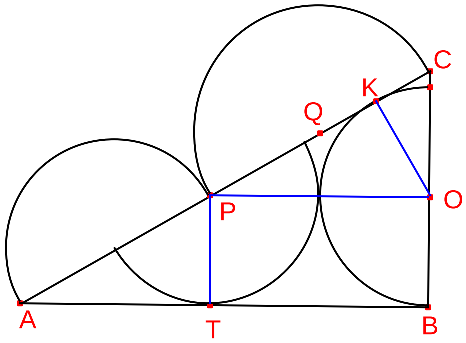
Siga $\angle MAQ = \alpha$.
$\angle MAC = 2\alpha$
$\overline{MC} = 2(R - r)$
$$\tan\alpha = \frac{r}{2\sqrt{Rr - r^2}}$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2(R-r)}{2\sqrt{Rr - r^2}} = \frac{2\cdot\frac{r}{2\sqrt{Rr-r^2}}}{1-\left(\frac{r}{2\sqrt{Rr-r^2}}\right)^2}$$
$$R - r = \frac{r}{\frac{4Rr - 5r^2}{4(Rr - r^2)}}$$
$4R - 5r = 4r$
$$\frac{r}{R} = \frac{4}{9}$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{exterior}} = \frac{2\cdot\pi r^2}{\pi R^2} = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{32}{81}$$

3469.- La figura està formada per un triangle rectangle i quatre semicercles, tres d'ells iguals d'àrea 3.
Calculeu l'àrea X del quart semicercle.



Solució:

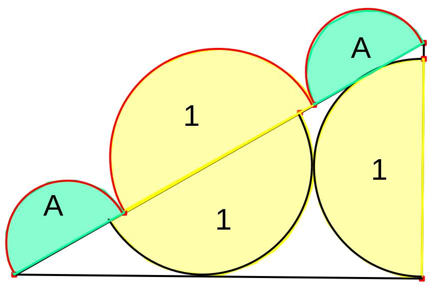
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Siga el semicercle d'àrea 3 de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OK} = r$
Siga el semicercle d'àrea 3 de centre P i radi $\overline{PT} = r$
Els dos semicercles són tangents i $\overline{PT}, \overline{OB}$ paral·lels i iguals.
Aleshores, $\overline{OP} = 2r$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}, \overset{\Delta}{PKO}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AP} = 2r$, diàmetre de semicercle exterior al triangle d'àrea 3.
$\overline{AT} = r\sqrt{3}$

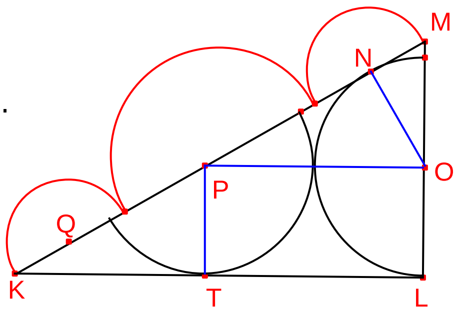
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}, \overset{\Delta}{POC}$ són semblants.
Els semicercles exteriors al triangle són semblants i de raó $\overline{AT} : \overline{PO} = \sqrt{3} : 2$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{X}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$X = 4$$

3470.- La figura està formada per un triangle rectangle i cinc semicercles, tres d'ells iguals d'àrea 1 i els alteres dos d'àrea A
Calculeu l'àrea A del semicercle.



Solució:

Siga el triangle rectangle$\overset{\Delta}{KLM}, L = 90°$
Siga el semicercle d'àrea 1 de centre O i radi $\overline{OL} = \overline{ON} = r$
Siga el semicercle d'àrea 1 de centre P i radi $\overline{PT} = r$
Els dos semicercles són tangents i $\overline{PT}, \overline{OL}$ paral·lels i iguals.
Aleshores, $\overline{OP} = 2r$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KTP}, \overset{\Delta}{PNO}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{KP} = 2r$.
$\overline{KT} = r\sqrt{3}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KTP}, \overset{\Delta}{KLM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KM}}{2r} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{KM} = \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)r$$

Siga el semicercle d'àrea A de centre Q i radi $\overline{QK} = s$

$$s = \frac{\overline{KM} - 2r}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$$

La proporció entre l'àrea dels semicercles d'àrea A i 1 és:

$$\frac{A}{1} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$