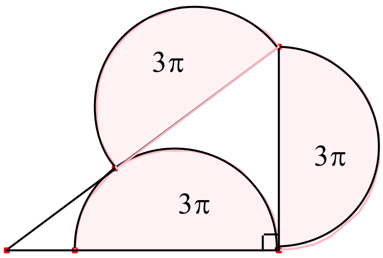
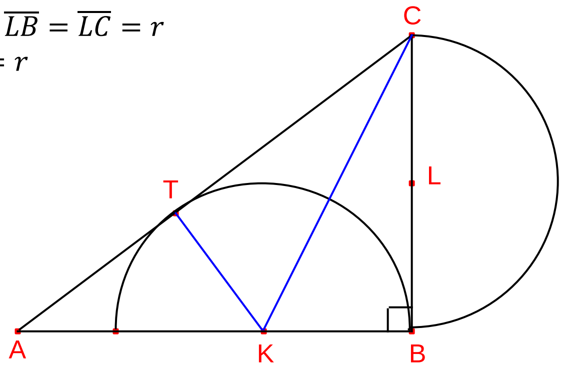
3471.- La figura està formada per un triangle rectangle i tres semicercles iguals d'àrees 3π
Calculeu l'àrea del triangle.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Siga el semicercle d'àrea 3π, de centre K i radi $\overline{LB} = \overline{LC} = r$
Siga el semicercle de centre L i radi $\overline{KB} = \overline{KT} = r$

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 3\pi$$
$$r^2 = 6$$



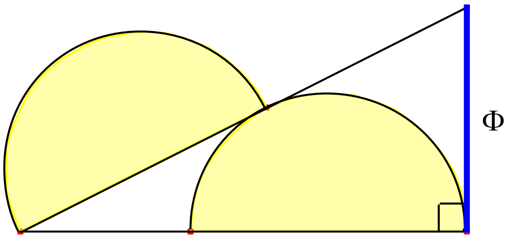
Siga $\alpha = \angle BCK$

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\tan 2\alpha = \frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$
$$\overline{AB} = \frac{8}{3}r$$

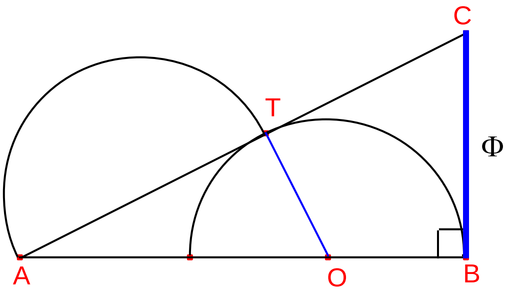
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}r\cdot 2r = \frac{8}{3}r^2 = 16$$

3472.- La figura està formada per un triangle rectangle tal que el catet menut és Φ i dos semicercles.
Calculeu la suma de les àrees dels dos semicercles.



Solució:



OB=OT=r

AT=2r

ABC, ATO semblants

Aplicant el teorema de Tales

AB=2Φ

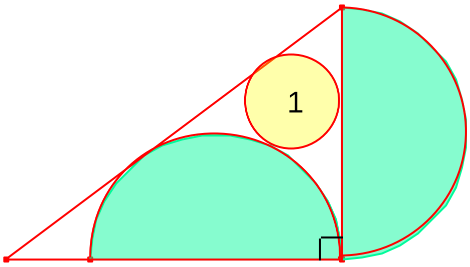
Teorema Pitàgores ATO

OA=r·sqrt(5)

r=AB-OA=1

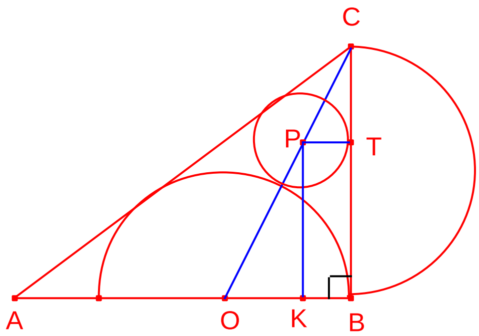
[2·semicercles]= π

3473.- La figura està formada per un triangle rectangle dos semicercles iguals i un cercle d'àrea 1.
Determineu la suma de les àrees dels dos semicercles.



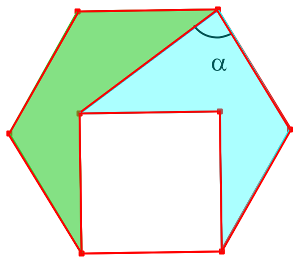
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OB} = r$
$\overline{BC} = 2r$
Siga el cercle de centre P àrea 1 i radi $\overline{PT} = s$

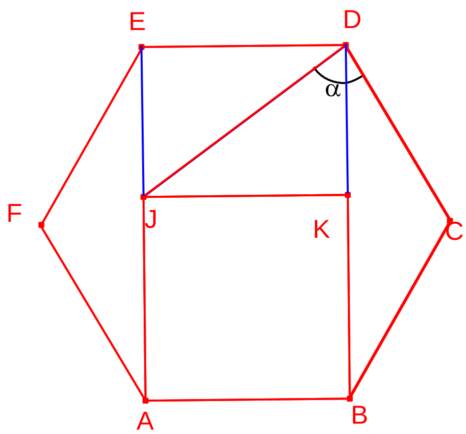


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OBC}, \overset{\Delta}{PTC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CT} = 2s$
Siga K la projecció de P sobre $\overline{AB}$.
$\overline{OP} = r + s, \overline{OK} = r - s, \overline{PK} = 2(r - s)$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:
$(r + s)^2 = (r - s)^2 + 4(r - s)^2$
$r + s = (r - s)\sqrt{5}$
$\frac{r}{s} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \Phi^2$
La proporció d'àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \Phi^4 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{4} \approx 6.8541$

3474.- Sobre un costat d'un hexàgon regular s'ha dibuixat un quadrat.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos pentàgons ombrejats i $\tan\alpha$



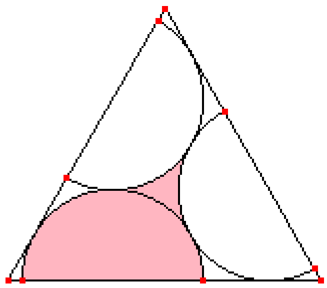
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el quadrat $ABKJ$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AEF}, \overset{\Delta}{BCD}$ són iguals, per tant tenen la mateixa àrea.
Considerem el rectangle $DEJK$
Els triangles $\overset{\Delta}{JKD}, \overset{\Delta}{DEJ}$ són iguals, per tant tenen la mateixa àrea.
Aleshores, els pentàgons $BCDJK, AJDEF$ tenen la mateixa àrea.



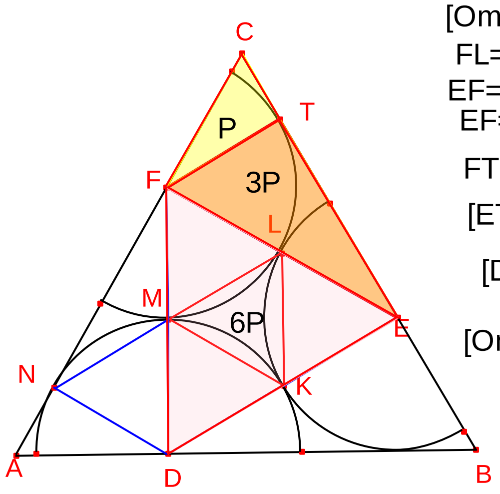
Siga $\angle JDK$
$\overline{DK} = \overline{BD} - 1 = \sqrt{3} - 1$
$\tan\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
$\alpha = 30° + \beta$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 4 + 3\sqrt{3}$$

3475.- La figura està formada per un triangle equilàter i tres semicercles iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del triangle equilàter.

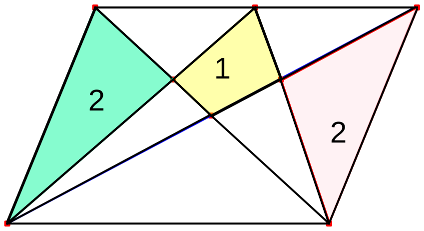


Solució:

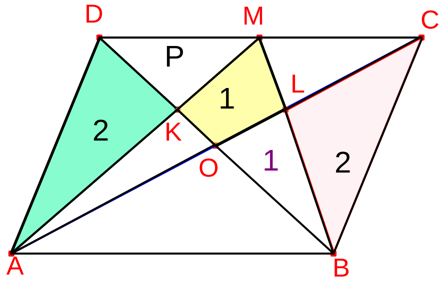


[Ombrejada]=[DEF]
FL=FT=r
EF=2r
EF=sqrt(3)
FTC, ETF semblants
[ETF]=3·[FTC]
[DEF]=2·[ETF]
[Ombrejada]/[ABC]=6P/(18P)=1/3

3476.- En un paral·lelogram s'han dibuixat dues diagonals i dos segments que formen tres regions d'àrees 2, 1, 2.
Calculeu l'àrea del paral·lelogram.



Solució:



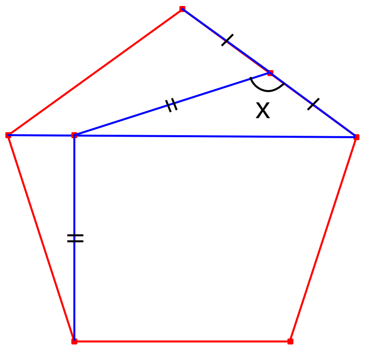
[DMB]=[DMA]

2+P=1+P+[OLB]
[OLB]=1

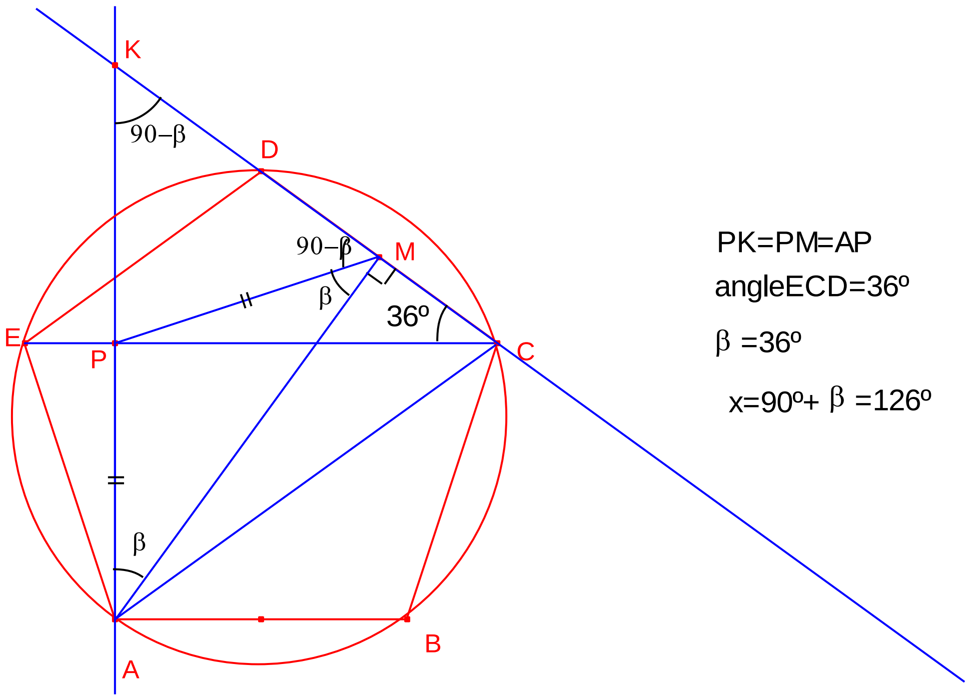
[OBC]=3

[ABCD]=4·[OBC]=12

3477.- La figura està formada per un pentàgon regular. calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



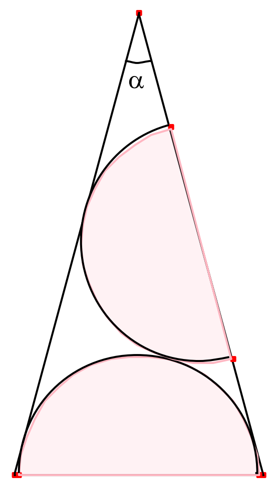
PK=PM=AP

angleECD=36º

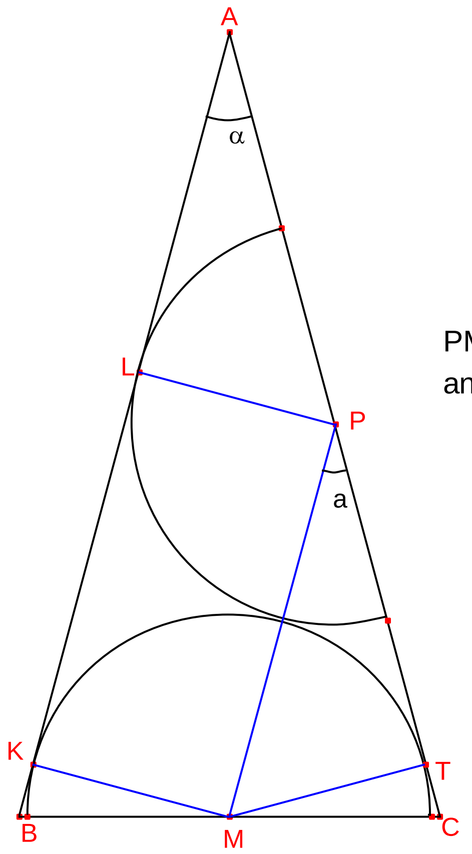
β =36º

x=90º+ β =126º

3478.- En un triangle isòsceles s’ha dibuixat dos semicercles iguals.
Calculeu la mesura de l’angle α



Solució:



PM, AB paral·lels

angle BAC=angleMPC= α

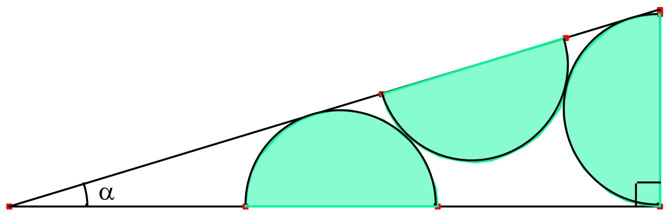
MT=r

PM=2r

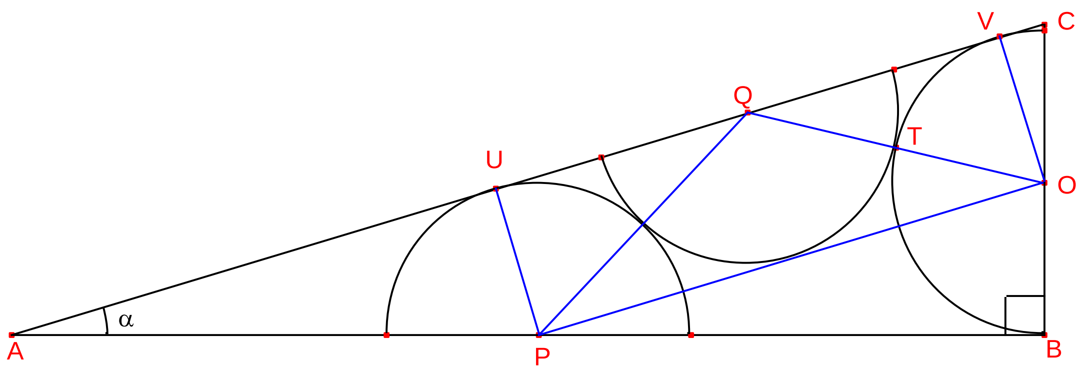
angleMTP=90º

α =30º

3479.- En un triangle rectangle s'ha dibuixat tres semicercles iguals i tangents. Calculeu la mesura de l'angle $\tan\alpha$



Solució:



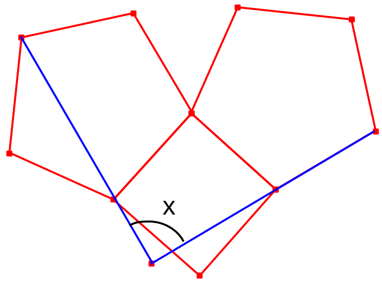
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OV} = r$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PU} = r$
Siga el semicercle de centre Q i radi $\overline{QT} = r$
$\overline{OP}$ és paral·lel a $\overline{AC}$
$\alpha = \angle BAC = \angle BPO$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQV}$:
$\overline{QV} = \overline{QR} = r\sqrt{3}$
$\overline{PQ} = \overline{UV} = 2r\sqrt{3}$

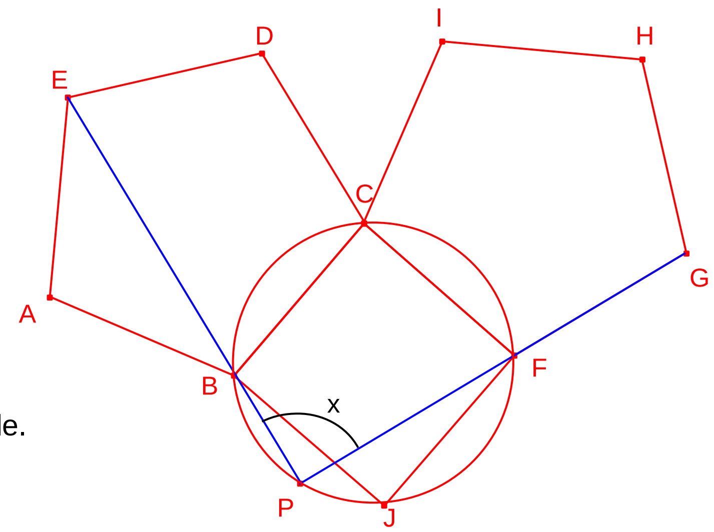
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBO}$:
$\overline{PB} = r\sqrt{11}$

$$\tan\alpha = \frac{r}{r\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

3480.- La figura està formada per dos pentàgons regulars iguals i un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:
Siguen els pentàgons regulars $ABCDE, CFGHI$.
Siga el quadrat $BCFJ$
Siga P la intersecció de les rectes $BE, \overline{FG}$
Siga $x = \angle BPF$



$\angle ABE = 36°$
$\angle ABP = 180° - 36° = 144°$
$\angle ABJ = 360° - (90° + 108°) = 162°$
$\angle PBJ = 162° - 144° = 18°$

$\angle JFG = 360° - (90° + 108°) = 162°$
$\angle PBJ = 180° - 162° = 18°$

Aleshores, el quadrilàter $BPJF$ és inscripltible.
$BJFC$ és inscriptible
Aleshores, $BPJFC$ és inscriptible.

$x = \angle BPF = \angle BJF = 90°$