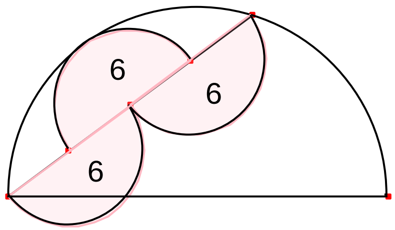
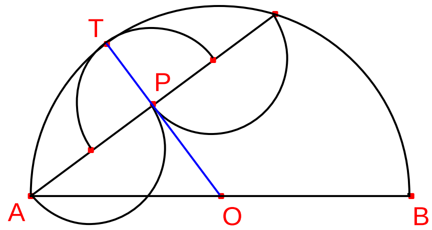
3481.- La figura està formada per quatres semicercles, tres d'ells d'àrea 6.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.



Solució:
Siga el semicercle d'àrea 6, centre P i radi $\overline{PT} = r$

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 6$

Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$



$\overline{AP} = 2r, \overline{OP} = R - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:

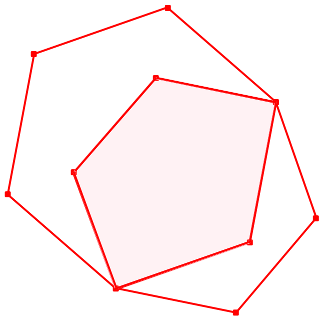
$R^2 = 4r^2 + (R - r)^2$

$R = \frac{5}{2}r$

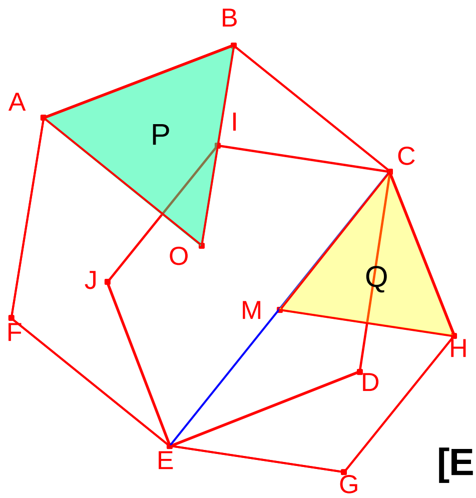
L'àrea del semicercle de centre O és:

$S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi \frac{25}{4} r^2 = \frac{75}{2}$

3482.- La figura està formada per dos hexàgons regulars.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos hexàgons i l'àrea total.



Solució:



AB=1
CE=sqrt(3)
CM=sqrt(3)/2
[ABO]=P, [CMH]=Q

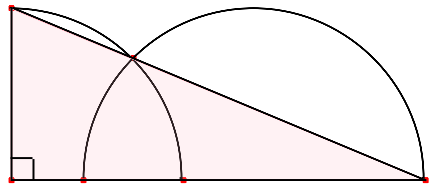
[CMH]=(3/4)[ABO]

Q=(3/4)P

[EDCIJ]=P+3Q=(13/4)P
[ABCHGEF]=5P+3Q=(29/4)P

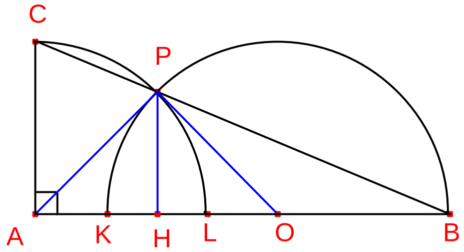
[EDCIJ]/[ABCHGEF]=13/29

3483.- Sobre un triangle rectangle s'han dibuixat un quadrant i un semicercle de radi 1. Calculeu l'àrea del triangle rectangle.



Solució:

Siga el rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga el quadrant de centre A de radi $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{AL} = 1$
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OK} = 1$
Siga H la projecció de P sobre el catet $\overline{AB}$.
Siga $\angle PAO = \angle AOP = \alpha$



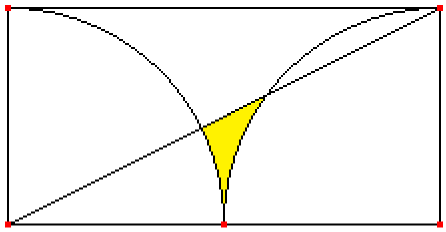
$\angle ABP = \frac{1}{2}\alpha$
$\angle CAP = 90° - \alpha$
$\angle ACP = 45° + \frac{1}{2}\alpha$
$45° + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = 90°$
$\alpha = 45°$

$\overline{AH} = \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\overline{AB} = 1 + \sqrt{2}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

3484.- El rectangle de la figura té dibuixats dos quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle.



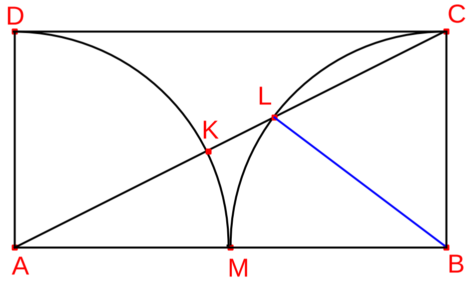
Solució:
Siga el rectangle $ABCD$ de costats $\overline{AB} = 2, \overline{AD} = 1$
Siga $\angle CAB = \alpha$

$\tan\alpha = \frac{1}{2}$

$\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\angle LBC = 2\alpha$

$\angle ABL = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$



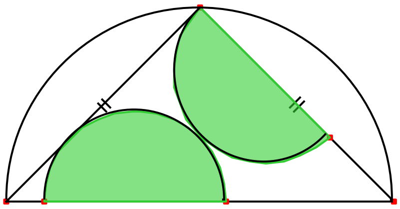
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de dels sectors de radi 1 i angles $\alpha, \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCL}$
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 2\alpha = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} =$$
$$= \frac{3}{5} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$$

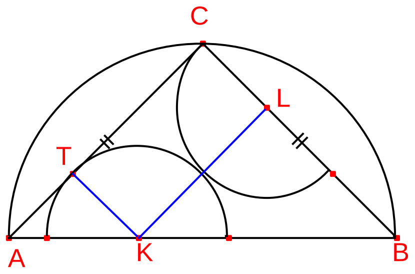
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}}{2} \approx 0.0232$$

3485.- Els dos semicercles ombrejats de la figura son tangents i iguals.
Calculeu la proporció de la suma de les àrees dels dos semicercles ombrejats i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:



AB=2R

KT=LC=r

angle TAK=45º

AT=r

AC=3r

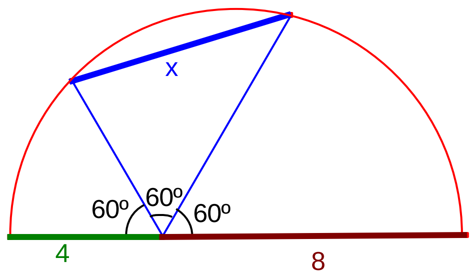
Teorema Pitàgores ABC

$4R^2=2\cdot 9r^2$

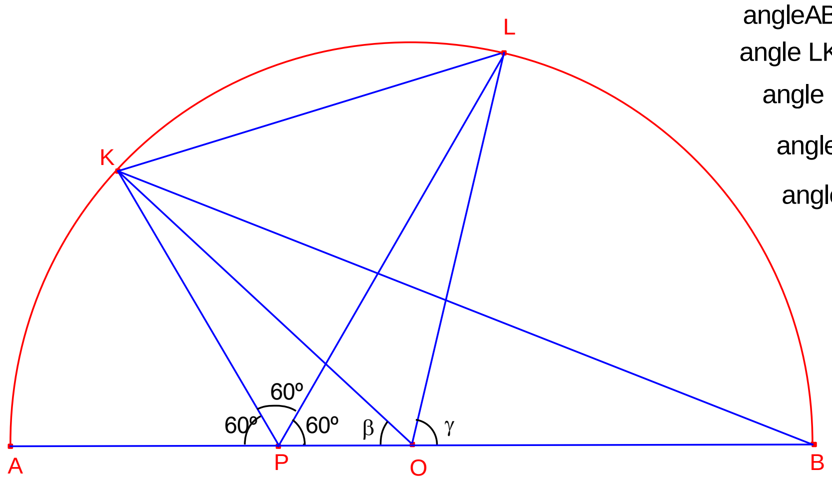
Proporció:

$2r^2/R^2=4/9$

3486.- El diàmetre d'un semicercle s'han dividit en dos segments que mesuren 4, 8, respectivament.
D'aquest punt s'han traçat dos segments que formen amb el diàmetre tres angles de 60º cadascun.
Calculeu la mesura del segment x



Solució 1:



AP=4, BP=8, AB=12

angleABK=angle OKB= $\beta/2$

angle LKB= $\gamma/2$

angle PKO= $60-\beta$

anglePLO= $\gamma-60$

anglePLK= $60-\gamma/2+\beta/2$

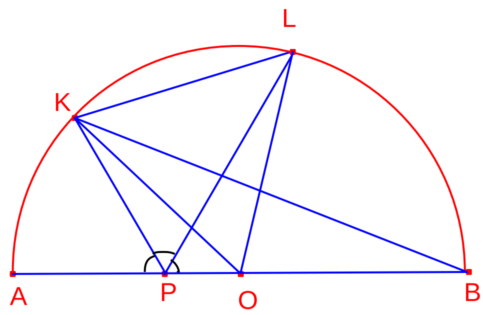
angleLKO= $(\beta+\gamma)/2$

angleKLO= $60+(\beta+\gamma)/2$

angleKOL=60º

KL=OL=6

Solució 2:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = 6, \overline{OB} = 6$
Siga P tal que $\overline{AP} = 4, \overline{BP} = 8, \angle APK = \angle KPL = \angle LPB = 60°$
Siga $x = \overline{KL}$
Siguen $\overline{PL} = y, \overline{PK} = z$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LPO}$

$$6^2 = 2^2 + y^2 - 2 \cdot 2y\frac{1}{2}$$

$$y = 1 + \sqrt{33}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KPO}$

$$6^2 = 2^2 + y^2 + 2 \cdot 2z\frac{1}{2}$$

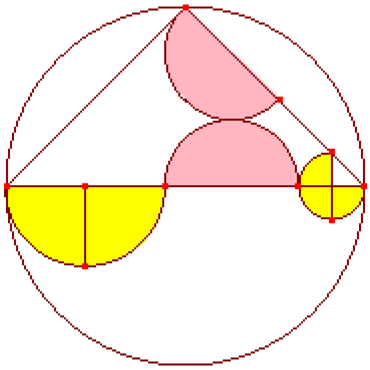
$$y = -1 + \sqrt{33}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KPL}$

$$x^2 = \left(1 + \sqrt{33}\right)^2 + \left(-1 + \sqrt{33}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \sqrt{33}\right)\left(-1 + \sqrt{33}\right)\frac{1}{2}$$

$$x = 6$$

3487.- La figura està formada per una circumferència, un triangle rectangle isòsceles, dos semicercles iguals i tangents i cinc quadrants (grocs).
Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels cinc quadrants i l'àrea del cercle exterior.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$
Siga la semicircumferència de centre P i radi $\overline{PJ} = r$
Siga la semicircumferència de centre Q i radi $\overline{QC} = r$

$\overline{PQ} = \overline{PB} = r, \overline{BQ} = 2r\sqrt{2}$

$$R = \overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}r$$

Siga la circumferència de centre L i radi $s = \overline{LB}$

$\overline{JB} = r$

$$s = \frac{1}{2}r$$

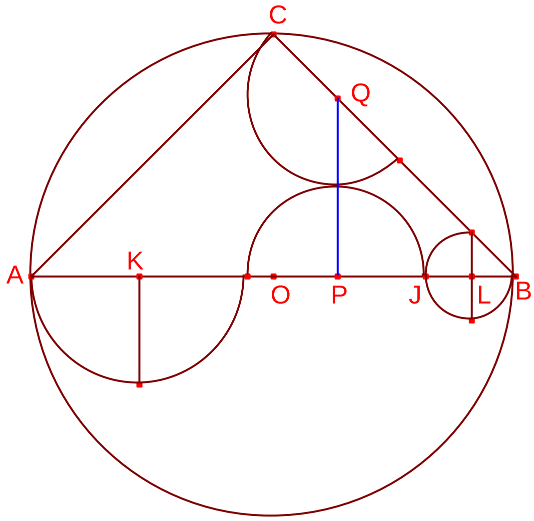
Siga el quadrant de centre K i radi $t = \overline{KA}$

$$2t = 2R - 3r = \left(1+\sqrt{2}\right)r$$

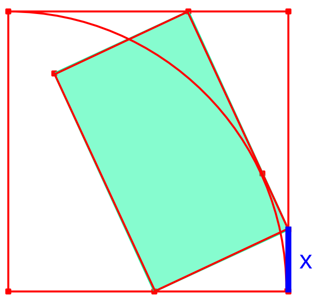
$$t = \frac{1+\sqrt{2}}{2}r$$

La proporció d'àrees és:

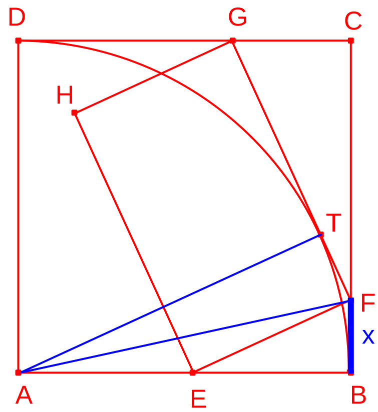
$$\frac{S_{groga}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{2}t^2}{R^2} = \frac{\frac{3}{16} + \frac{3+2\sqrt{2}}{8}}{\frac{9+4\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{8}$$



3488.- Un rectangle dins d'un quadrat. Un dels seus costats és tangent al quadrant.
Calculeu la proporció de l'àrea del rectangle i del quadrat quan x s'aproxima a zero.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 1$
Siga el rectangle $EFGH$.
Siga $\overline{BF} = x$



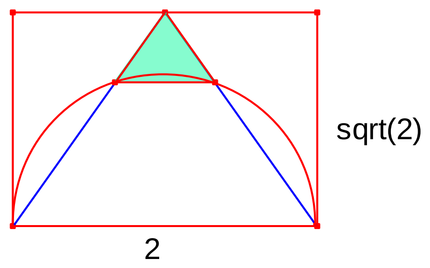
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{ATF}$ són iguals.
$\overline{EF}, \overline{AT}$ són paral·lels
$\angle TAF = \angle FAB = \alpha$
$\angle FEB = \angle GFC = 2\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin 2\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$$

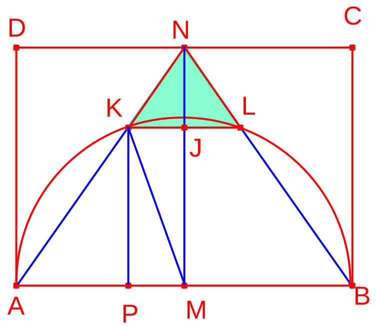
$$\overline{EF} = \frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{1+x^2}{2}$$
$$\overline{GF} = \frac{1-x}{\cos 2\alpha} = \frac{1+x^2}{1+x}$$

L'àrea del rectangle $EFGH$ és:
$$S_{EFGH} = \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{(1+x^2)^2}{2(1+x)}$$
$$\lim_{x\to 0} S_{EFGH} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^2}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$

3489.- Siga el rectangle de costats $2, \sqrt{2}$
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle ombrejat i l'àrea del rectangle.



Solució:

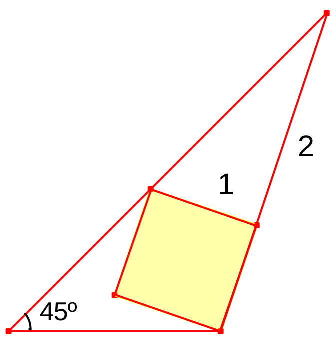


Siga el rectangle $ABCD$ de costat $\overline{Ab} = 2, \overline{BC} = \sqrt{2}$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 2\sqrt{2}$
Siguen M, N, els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{KLN}$
Siga P la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{MP} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPM}$:
$\overline{PK} = \sqrt{1 - a^2}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APM}, \overset{\Delta}{AMN}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - a} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$
Resolent l'equació:
$$a = \frac{1}{3}$$
$$\overline{PK} = \sqrt{1 - a^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\overline{NJ} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLN}$ és:
$$S_{KLN} = \frac{1}{2} 2a \cdot \overline{NJ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{9}\sqrt{2}$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{KLN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{9}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{18}$$

3490.- En la figura calculeu la proporció entre l'àrea del quadrat ombrejat i l'àrea del triangle.



Solució:

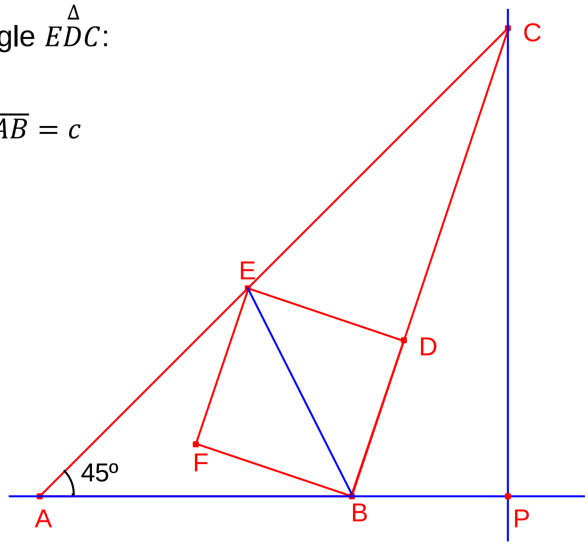
Siga el quadrat $BDEF$ de costat $\overline{DE} = 1$

$\overline{BE} = \sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDC}$:

$\overline{CE} = \sqrt{5}$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 45°, a = \overline{BC} = 3, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$



Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BEC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{3}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{c}$$

$$b = \frac{9\sqrt{5}}{5}, c = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

Siga P la projecció de C sobre la recta AB.

$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2} b = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot \overline{CP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{9\sqrt{10}}{10} = \frac{27}{10}$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BDEF}}{S_{ABCD}} = \frac{10}{27}$$