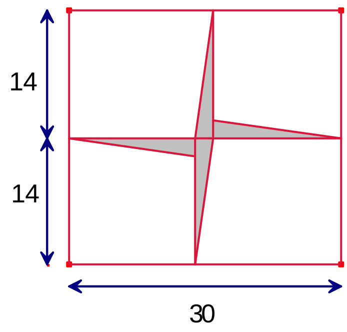
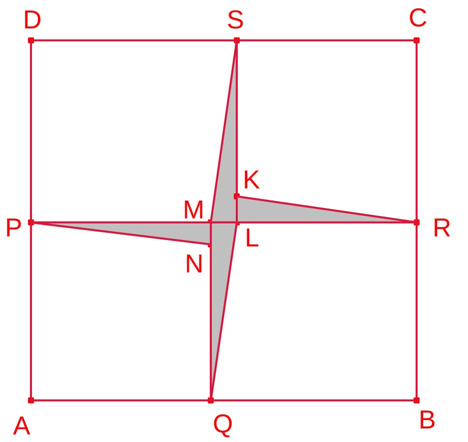
Problemes de Geometria per a l'ESO 35

341.- Dins del rectangle de la figura hi ha quatre triangles rectangles iguals.
Determineu l'àrea total dels triangles.
Proves Cangur 2011. Nivell 1, problema 23.



Solució:



Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 30$, $\overline{AD} = 28$.
Siga $\overline{PQ}$ la paral·lela mitjana.

Els triangles $\overset{\Delta}{PMN}$, $\overset{\Delta}{SLM}$ són iguals, per tant, $\overline{PM} = \overline{SL} = 14$

Els triangles $\overset{\Delta}{PMN}$, $\overset{\Delta}{RLK}$ són iguals, per tant, $\overline{PM} = \overline{RL} = 14$.

Aleshores, $\overline{ML} = \overline{AB} - 2\overline{PM} = 30 - 2 \cdot 14 = 2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{SLM}$ és:

$$S_{SLM} = \frac{\overline{ML} \cdot \overline{SL}}{2} = \frac{2 \cdot 14}{2} = 14.$$

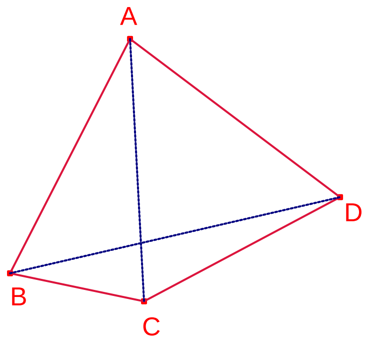
L'àrea total dels quatre triangles és:

$$S_{total} = 4 \cdot S_{SLM} = 4 \cdot 14 = 56.$$

342.- En un quadrilàter convex ABCD amb $\overline{AB} = \overline{AC}$, es coneixen els següents angles: $\angle BAD = 80^o$, $\angle ABC = 75^o$, $\angle ADC = 65^o$. Quant mesura l'angle $\angle BDC$.

Proves Cangur Catalunya 2011. Nivell2, problema 26.

Solució:



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles ja que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Com que $\angle ABC = 75^o$, $\angle BAC = 30^o$.

Si $\angle BAD = 80^o$ i $\angle BAC = 30^o$, aleshores, $\angle CAD = 50^o$.

Si $\angle BAD = 80^o$, $\angle ABC = 75^o$, $\angle ADC = 65^o$ i el quadrilàter és convex, aleshores, $\angle BCD = 360^o - (\angle BAD + \angle ABC + \angle ADC) = 140^o$.

Si $\angle BCD = 140^o$ i $\angle ACB = 75^o$, aleshores, $\angle ACD = 65^o$.

Per tant el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles, $\overline{AC} = \overline{AD}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Per tant, $\angle BDA = \dfrac{180^o - 80^o}{2} = 50^o$.

Com que $\angle BDA = 50^o$ i $\angle ADC = 65^o$, aleshores, $\angle BDC = 15^o$.

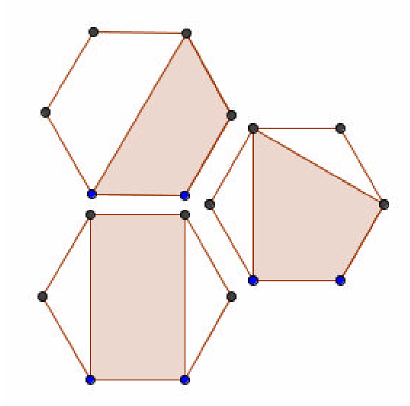
343.- Dos polígons regulars són “companyons” si l’angle interior del primer és tres vegades l’angle exterior del segon.
Determineu tots els polígons regulars companyons.
KöMaL C1081. Maig 2011.

Solució:
Siga n el nombre de costats del primer i m el nombre de costats del segon.
L’angle interior del primer és:
$180º-\frac{360º}{n}$.
L’angle exterior del segon és:
$\frac{360º}{m}$.

Aleshores, $180º-\frac{360º}{n}=3\frac{360º}{m}$. Simplificant:
$1-\frac{2}{n}=\frac{6}{m}$.
$nm-2m=6n$.
Resolent l’equació en la incògnita n:
$n=\frac{2m}{m-6}$. Efectuant la divisió:
$n=2+\frac{12}{m-6}$.
Aleshores, $m-6$ divideix a 12.
Les úniques possibilitats són:
$m=7,8,9,10,12,18$. Les solucions són:
$\begin{cases}n=14\\m=7\end{cases}$, $\begin{cases}n=8\\m=8\end{cases}$, $\begin{cases}n=6\\m=9\end{cases}$, $\begin{cases}n=5\\m=10\end{cases}$, $\begin{cases}n=4\\m=12\end{cases}$, $\begin{cases}n=3\\m=18\end{cases}$.
Taula de resultats:

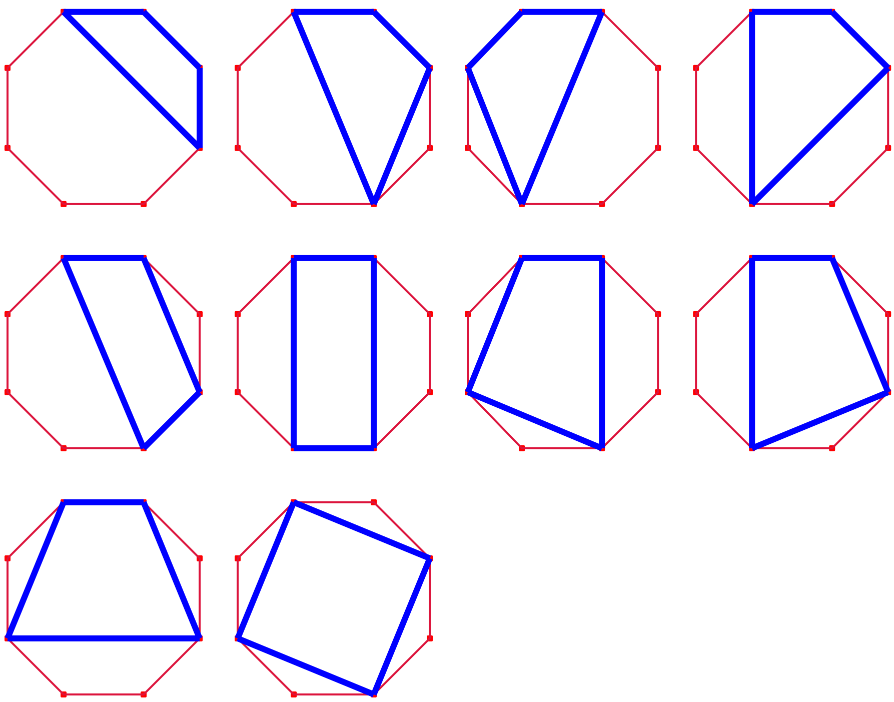
Nombre costat primer n	Nombre costats segon m	Angle interior primer	Angle exterior segon
14	7	$\frac{1080}{7}\approx 154º17'9''$	$\frac{360}{7}\approx 51º25'43''$
8	8	135º	45º
6	9	120º	40º
5	10	108º	36º
4	12	90º	30º
3	18	60º	20º

344.- En un hexàgon regular es poden inscriure tres tipus de quadrilàters distints.



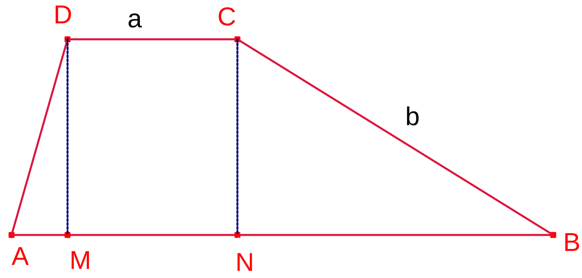
Quants quadrilàters distints es poden dibuixar en un octògon regular.
Problemáticos.

Solució:
10 en total:



345.- Siga el trapezi ABCD, $\overline{AB}$, paral·lel a $\overline{CD}$ tal que $\overline{CD}=a$, $\overline{BC}=b$ i l'angle $\angle BCD$ mesura el doble que l'angle $\angle DAB$.
Determineu la mesura del costat $\overline{AB}$.

Solució 1:



Siga $\angle DAB=\alpha$, $\angle BCD=2\alpha$.
$\angle ABC=180^{o}-2\alpha$.
Siga M la projecció de D sobre $\overline{AB}$, siga N la projecció de C sobre $\overline{AB}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCN}$:
$\overline{CN}=b\cdot\sin 2\alpha$, $\overline{NB}=b\cdot\cos(180^{o}-2\alpha)=-b\cdot\cos 2\alpha$.

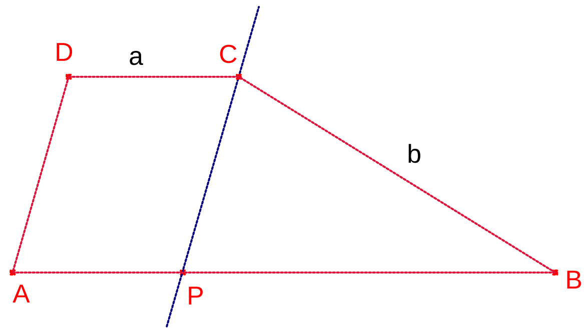
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\overline{DM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{AM}}=\frac{b\cdot\sin 2\alpha}{\overline{AM}}.$$

$$\overline{AM}=\frac{b\cdot\sin 2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=2b\cdot\cos^{2}\alpha.$$

$$\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{CD}+\overline{NB}=2b\cdot\cos^{2}\alpha+a-b\cdot\cos 2\alpha=a+b.$$

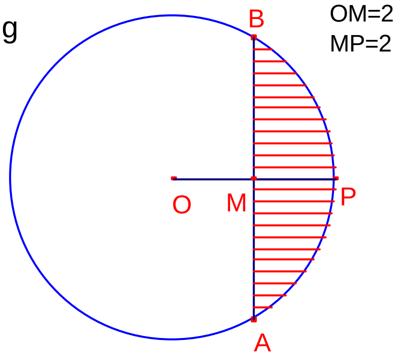
Solució 2, Tony Gardiner:



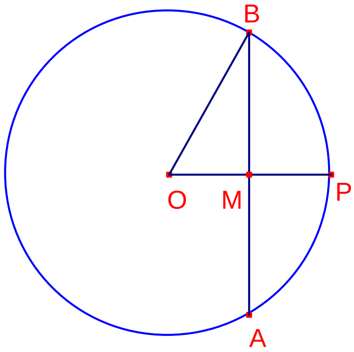
Siga $\angle DAB=\alpha$, $\angle BCD=2\alpha$.
Siga $\overline{CP}$ paral·lel a $\overline{AD}$. Aleshores, APCD és un paral·lelogram, aleshores:
$\angle DCP=\alpha$, $\angle CPB=\alpha$.
Com que $\angle BCD=2\alpha$ i $\angle DCP=\alpha$ aleshores, $\angle PCB=\alpha$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PCB}$ és isòsceles,
$\overline{PB}=\overline{BC}=b$.
$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=a+b$.

346.- En una circumferència de centre O, siga M el punt mig del radi $\overline{OP} = 4$.
Determineu l'àrea del segment circular AB.



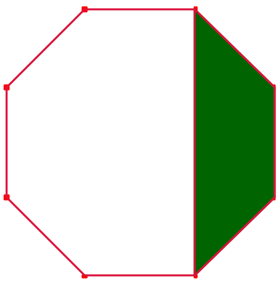
Solució:
$\overline{OB} = 4$, $\overline{OM} = 2$.
$\angle OMB = 90^{o}$.
Aleshores, $\angle BOM = 60^{o}$.
Per tant, el segment circular AB abraça 120º de la circumferència.



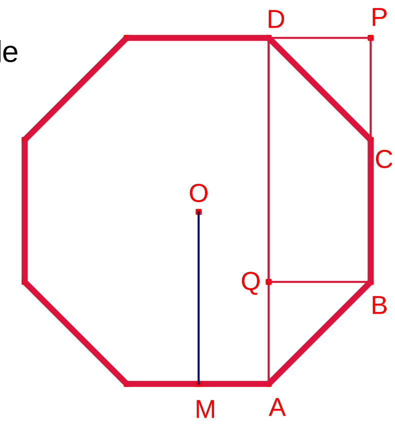
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OPB}$ és equilàter i té la mateixa àrea que el triangle $\overset{\Delta}{ABO}$.
L'àrea del segment és la tercera part de l'àrea del cercle menys l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPB}$.

$$S = \frac{1}{3}\left(\pi 4^2\right) - \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}.$$

347.- En l'octògon regular de la figura calculeu la raó de proporcionalitat de les àrees de la zona ombrejada i la de l'octògon.



Solució 1:



Siga $\overline{AB}=c$ costat de l'octògon regular.
L'àrea de la zona ombrejada ABCD és igual a l'àrea del rectangle BPDQ.

El triangle $\overset{\Delta}{ABQ}$ és rectangle i isòsceles.

$$\overline{AQ}=\overline{BQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}c\,.$$

$$\overline{BP}=\overline{BC}+\overline{AQ}=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)c\,.$$

$$S_{ABCD}=S_{BPDQ}=\overline{BQ}\cdot\overline{BP}=\frac{\sqrt{2}}{2}c\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)c=\frac{1+\sqrt{2}}{2}c^2\,.$$

L'apotema de l'octogon és:

$$\overline{OM}=\overline{AQ}+\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}c\,.$$

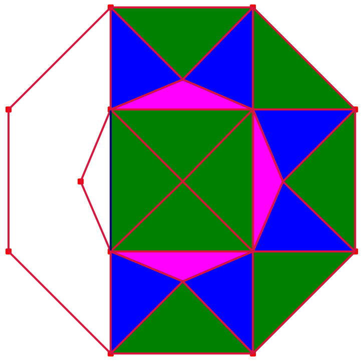
L'àrea de l'octògon és:

$$S_{\text{octògon}}=\frac{8c\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}c}{2}=2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2\,.$$

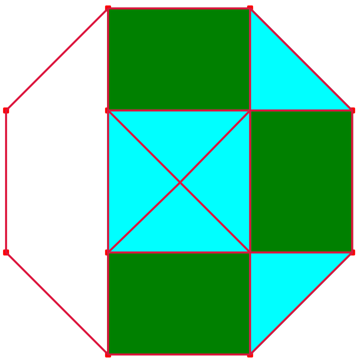
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\text{octògon}}}=\frac{1}{4}\,.$$

Solució 2:

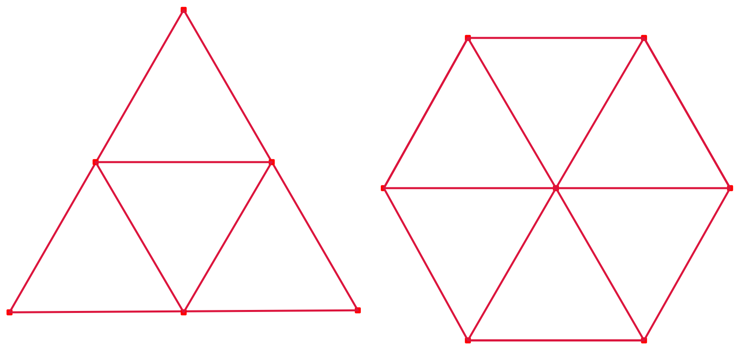


Solució 3:



348.- Un triangle equilàter i un hexàgon regular tenen igual perímetre.
Calculeu la proporció de les àrees.

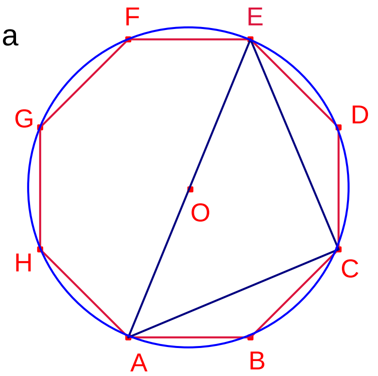
Solució:



$$\frac{S_{\text{triangle}}}{S_{\text{hexàgon}}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

349.- Calculeu la proporció entre la diagonal major i la menor d'un octògon regular.

Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon regular de centre O.



La diagonal major $\overline{AE}$ és un diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle.

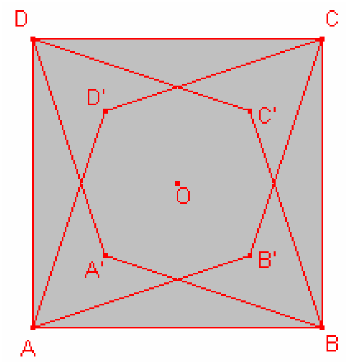
Aleshores, $\angle ACE = 90^{o}$.

Siga $\overline{AC} = \overline{CE}$ diagonals menors de l'octògon regular.

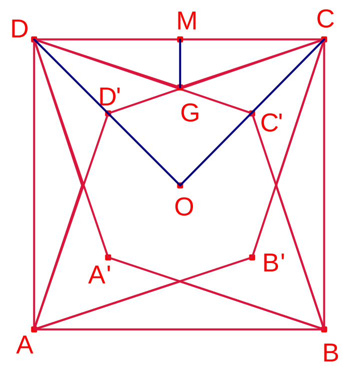
El triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és rectangle i isòsceles.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \sqrt{2}.$$

350.- Siga el quadrat ABCD de centre O.
Siga A’ el punt mig de $\overline{OA}$, B’ el punt mig de $\overline{OB}$, C’ el punt mig de $\overline{OC}$ i D’ el punt mig de $\overline{OD}$.
Considerem els paral·lelograms AB’CD’, BC’DA’ que estan superposats.
Determineu la raó de les àrees que l’octògon que formen els dos paral·lelograms i l’àrea del quadrat.



Solució:
Siga $c=\overline{AB}$ costat del quadrat.
Siga G la intersecció dels segments $\overline{DC'}$ i $\overline{CD'}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.



Considerem el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DOC}$.
$\overline{DC'}$ i $\overline{CD'}$ són mitjanes d’aquest triangle, aleshores, G és el baricentre.
$\overline{OM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DOC}$.
Aplicant l propietat del baricentre: $\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{OM}$.

$\overline{OM}=\frac{c}{2}$.

$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{OM}=\frac{1}{6}c$.

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDM}$ és:

$$S_{CDM}=\frac{c\cdot\frac{1}{6}c}{2}=\frac{1}{12}c^2.$$

L’àrea ombrejada és:

$$S_{Ombrejada}=S_{ABCD}-4\cdot S_{CDM}=c^2-4\frac{1}{12}c^2=\frac{2}{3}c^2.$$

La raó entre les àrees és: $\frac{S_{Ombrejada}}{S_{ABCD}}=\frac{2}{3}$.