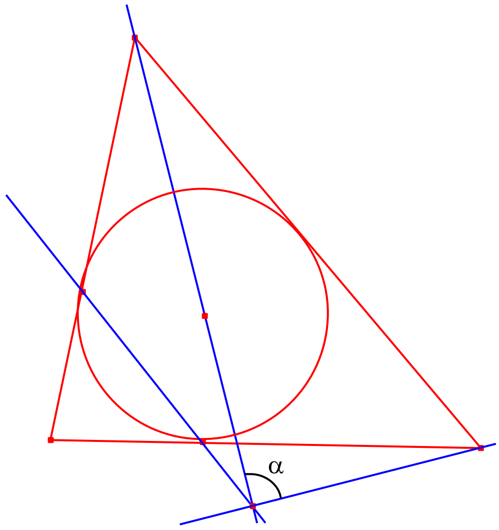
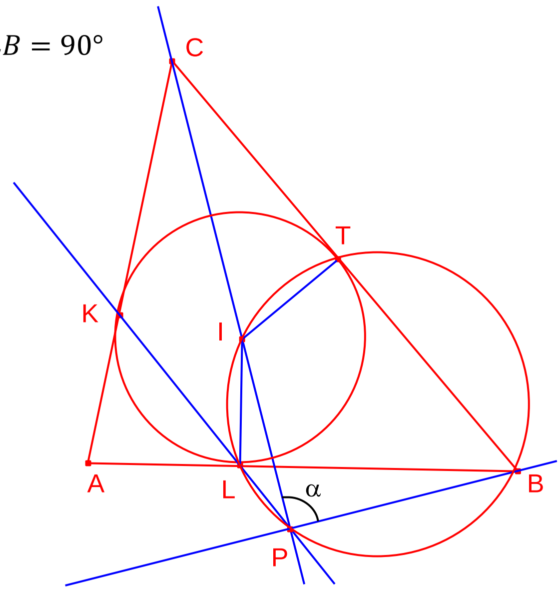
3491.- En la figura proveu que l'angle α és recte.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'incentre I
Siguen K, L, T els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle.
Siga P la intersecció de les rectes KL, CI.
Siga $\alpha = \angle CPB$

El quadrilàter $ILBT$ és inscriptible ja que $\angle ITB = \angle ILB = 90°$



$\angle KCP = \frac{1}{2}C$

$\angle AKL = \angle ALK = 90° - \frac{1}{2}A$

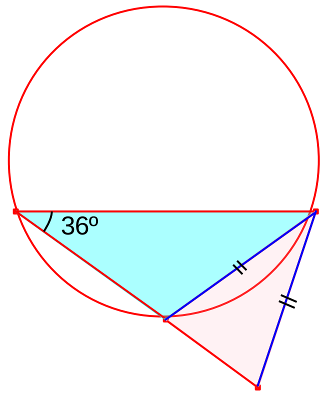
$\angle CKL = 90° + \frac{1}{2}A$

$\angle KPC = \angle LPI = \frac{1}{2}B$

$\angle LBI = \frac{1}{2}B$

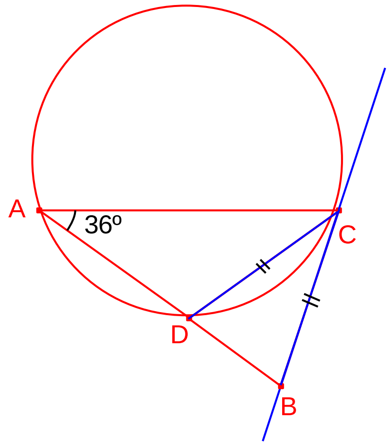
Aleshores, el quadrilàter $ILPB$ és inscriptible.
Per tant el pentàgon $ILPBT$ és inscriptible.
$\angle ILB = \angle IPB = 90°$
Aleshores, $\alpha = 90°$

3492.- Un triangle que té un costat tangent a la circumferència s'ha dividit en dos triangles.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle blau i l'àrea del triangle morat.

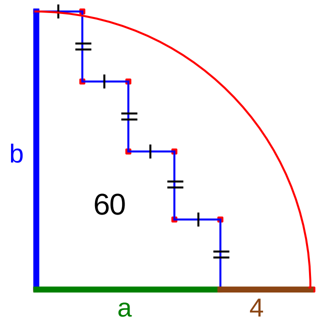


Solució:

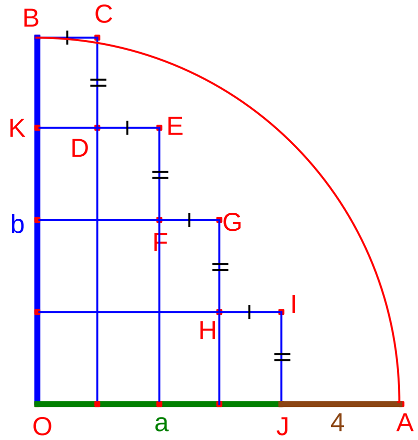
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 36°$, tal que $\overline{BC}$ és tangent a la circumferència.
$\angle BCD = \angle DAC = 36°$
Siga $\overline{BC} = \overline{CD} = 1$
$\angle CDB = \angle DBC = 72°$
$\angle ADC = 108°$
$\angle ACD = 36°$
$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDB}$ són semblants i de raó $\Phi : 1$
$\frac{S_{ABC}}{S_{CDB}} = \Phi^2$
La proporció entre l'àrea blava i la morada és:
$\frac{S_{ADC}}{S_{CDB}} = \frac{S_{ABC} - S_{CDB}}{S_{CDB}} = \Phi^2 - 1 = (\Phi+1)(\Phi-1) = \Phi^2 \cdot \frac{1}{\Phi} = \Phi$



3493.- En el quadrant s'ha dibuixat una línia poligonal que forma amb els radis un polígon d'àrea 60. Calculeu la proporció:
$\frac{a}{b}$

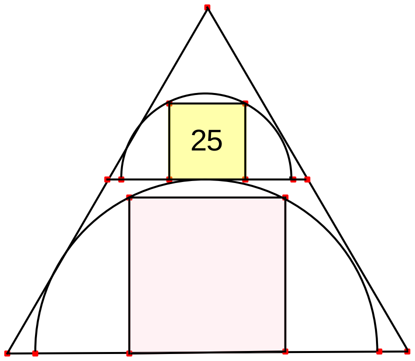


Solució:
Siga el quadrant de centre O i radi $\overline{OA} = a + 4, \overline{OB} = b$
Siga la línia poligonal $BCDEFGHIJ, \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HI} = \frac{1}{4}a, \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{IJ} = \frac{1}{4}b$
L'àrea que forma la línia poligonal i els radi és 60:
$60 = 10 \cdot S_{BCDK} = 10 \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{1}{4}b$

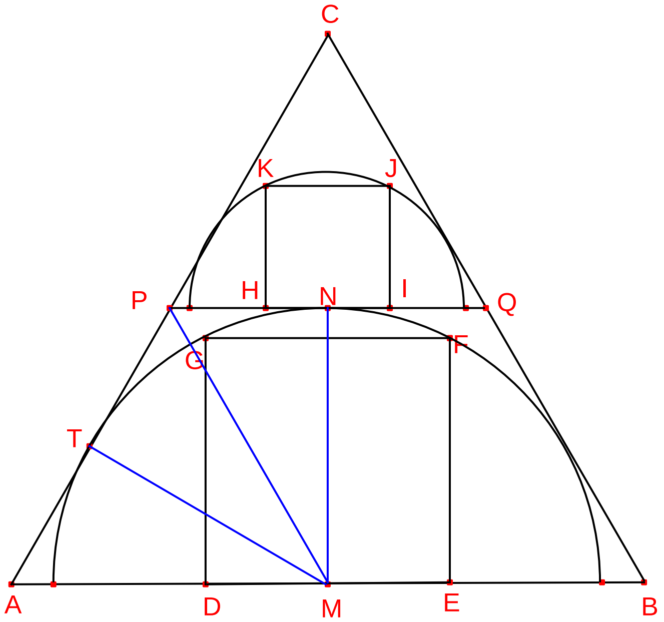


$\begin{cases} b = a + 4 \\ ab = 96 \end{cases}$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} a = 8 \\ b = 12 \end{cases}$
$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

3494.- La figura està formada per un triangle equilàter dos semicercles i dos quadrats inscrits en cadascun dels semicercles.
Si el quadrat menut té àrea 25, calculeu l'àrea del quadrat gran.

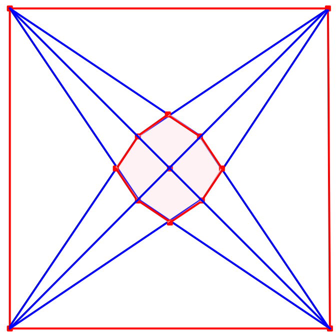


Solució:

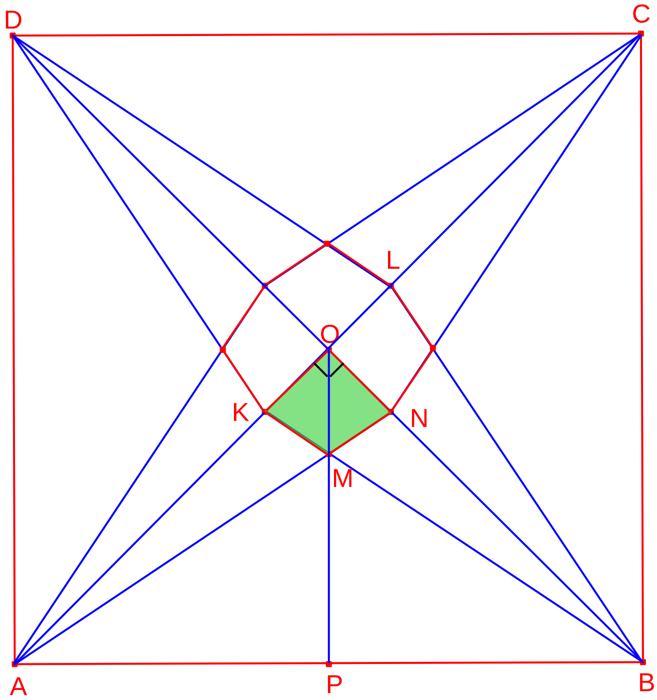


Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PQC}$
Siguen els quadrats $DEFG, HIJK, S_{HIJK} = 25$
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència de centre M i el costat $\overline{AC}$
$\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AM}$
$\overline{PT} = \overline{PN} = \overline{AT}$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PQC}$ són semblants i de raó $2 : 1$
Els quadrats $DEFG, HIJK$ són semblants i de raó $2 : 1$
$S_{ABCD} = 2^2 \cdot S_{HIJK} = 100$

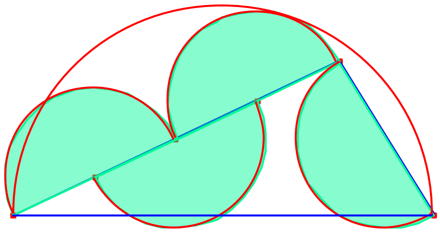
3495.- Les dues diagonals d'un quadrat s'han dividit en tres segments en proporció $2:1:2$
Calculeu la proporció entre les àrees de l'octògon ombrejat i el quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{AK}=4, \overline{KL}=2, \overline{LC}=4$
$\overline{AC}=10, \overline{AB}=5\sqrt{2}$
$\alpha=\angle AON$
$\angle MAB=45°-\alpha$
$\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$
$\tan(45°-\alpha)=\dfrac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}}=\dfrac{2}{3}$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:
$\dfrac{\overline{PM}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{3}$
$\overline{PM}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$
$\overline{OP}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
$\overline{OM}=\overline{OP}-\overline{PM}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KON}$:
$\overline{KN}=\sqrt{2}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada}=4\cdot S_{OKMN}=4\cdot\dfrac{1}{2}\overline{KN}\cdot\overline{OM}=4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{6}=\dfrac{10}{3}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD}=\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$
La proporció d'àrees és:
$\dfrac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}}=\dfrac{\frac{10}{3}}{50}=\dfrac{1}{15}$



3496.- El semicercles ombrejats tenen cadascun, àrea 9.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.

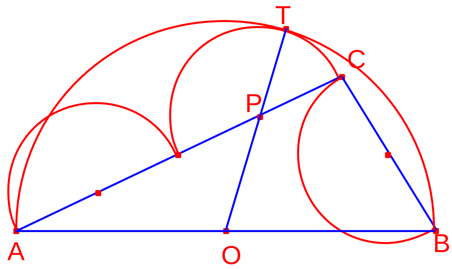


Solució:
Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OA} = \overline{OT} = R$
Siga el semicercle de centre P i radi $\overline{PC} = \overline{PT} = r$
L'àrea del semicercle de centre P és 9:

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = 9$$

$$\overline{AC} = 4r, \overline{BC} = 2r$$

Siga $\alpha = \angle BAC$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$4r^2 = 16r^2 + 4R^2 - 2 \cdot 4r \cdot 2R \cdot cos\alpha$$

$$4rR \cdot \cos\alpha = 3r^2 + R^2$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

$$(R - r)^2 = 9r^2 + R^2 - 2 \cdot 3r \cdot R \cdot cos\alpha$$

$$3rR \cdot \cos\alpha = 4r^2 + rR$$

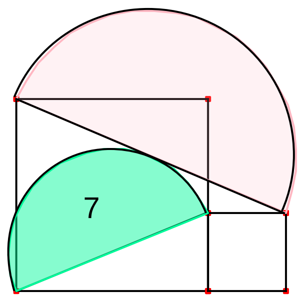
$$3R^2 - 4rR - 7r^2 = 0$$

$$\frac{R}{r} = \frac{7}{3}$$

L'àrea del Semicercle gran és:

$$\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{1}{2}\frac{49}{9}\pi r^2 = 49$$

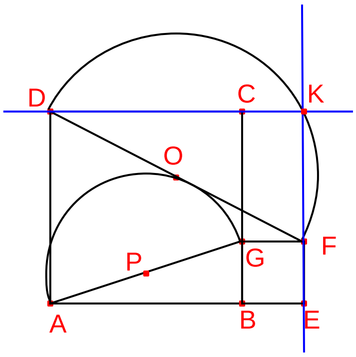
3497.- La figura està formada per dos quadrats i dos semicercles.
El menut té àrea 7.
Calculeu l'àrea del semicercle gran.



Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$ de costats $\overline{AB} = a, \overline{BE} = \overline{BG} = b$
Siga el semicercle de centre P àrea 7 i radi $\overline{PA} = \overline{PG} = r$

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 7$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABG}$:
$4r^2 = a^2 + b^2$



Siga el semicercle de centre O i radi $\overline{OD} = \overline{OF} = R$

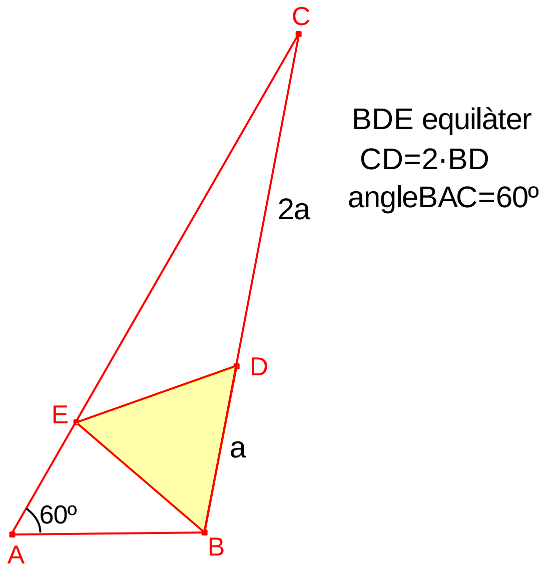
$\overline{KF} = \overline{CG} = a - b, \overline{DK} = a + b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABG}$:
$4R^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 8r^2$
$R^2 = 2r^2$

L'àrea del semicercle gran és:

$S_O = \frac{1}{2}\pi R^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = 14$

3498.- Calculeu la proporció entre les àrees del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BDE}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució 1:
Siga $\alpha = \angle ACB$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EDC}$

$\overline{CE}^2 = a^2 + 4a^2 + 2 \cdot a \cdot 2a\frac{1}{2}$

$\overline{CE}^2 = 7a^2$

$a^2 = 7a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a\sqrt{7} \cdot 2a \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{14}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{3a}{\sin 60°}$$

$$\overline{AC} = \frac{3a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{21}}{14} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{7}}{14}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9\sqrt{7}}{7}a$$

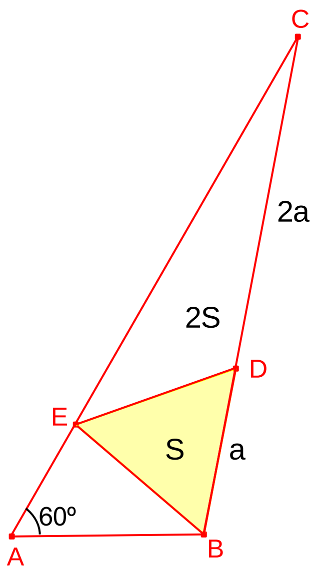
$$S_{BDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{9\sqrt{7}}{7}a \cdot \sin\alpha = \frac{27\sqrt{7}}{14}a^2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{27\sqrt{3}}{28}a^2$$

La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{27\sqrt{3}}{28}a^2} = \frac{7}{27}$$

Solució 2
Siga $S = S_{BDE}$
$S_{DCE} = 2S, S_{BCE} = 3S$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EDC}$

$\overline{CE}^2 = a^2 + 4a^2 + 2 \cdot a \cdot 2a\frac{1}{2}$

$\overline{CE} = a\sqrt{7}$

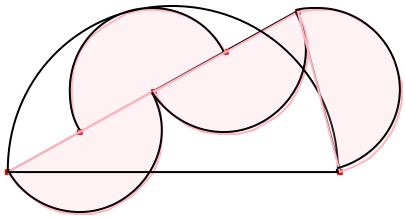
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BEC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{S_{ABC}}{3S} = \left(\frac{3a}{a\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{9}{7}, S_{ABC} = \frac{27}{7}$$

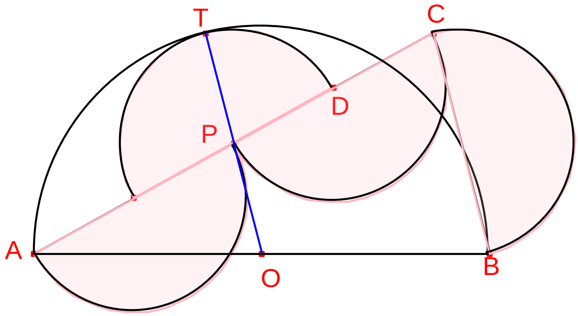
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{7}{27}$$

3499.- La figura està formada per quatre semicercles ombrejats d'àrea 1 cadascun d'ells i un semicercle gran. Calculeu l'àrea del semicercle gran.



Solució:



PD=r
OA=R

PA=PC

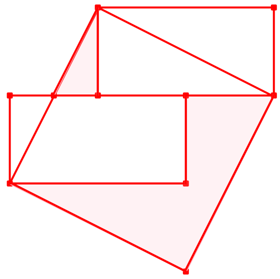
AOP, ABC semblants

OP=BC/2=r

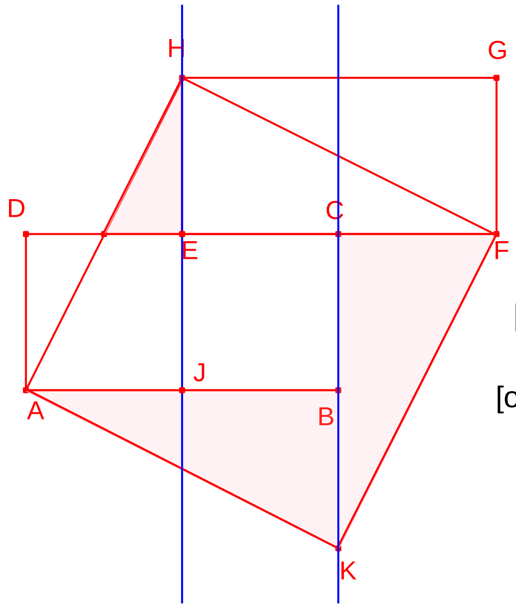
R=OT=2r

[semicerclegran]=4·1=4

3500.- Els dos rectangles morats són iguals. Calculeu la proporció entre l’àrea ombrejada i l’àrea del quadrat.



Solució:



AD=a, AB=b

GEH, HJA iguals

b=2a

$[AKFH]=AH^2=5a^2$

$[\text{ombrejada}]=2a^2+a^2/4=(9/4)a^2$

$[\text{ombrejada}]/[AKFH]=9/20$