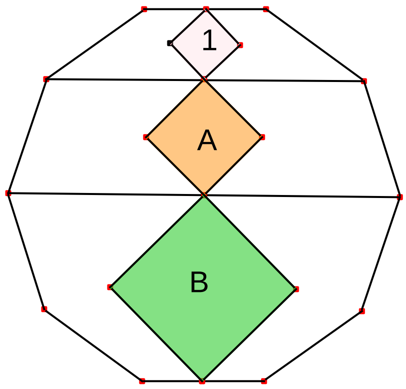
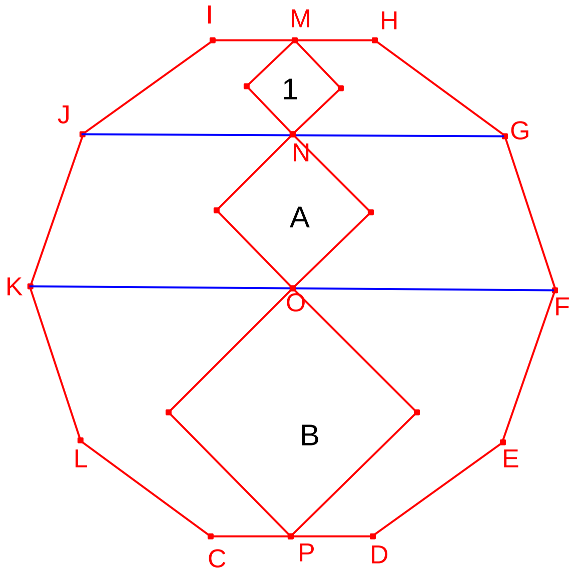
Problemes de Geometria per a l'ESO 351

3501.- En un decàgon regular s'ha dibuixat tres quadrats d'àrees $1, A, B$
Calculeu les àrees A, B



Solució:



CD=a

MN=a·sin36º

ON=a·sin72º

OP=a(sin36º+sin 72º)

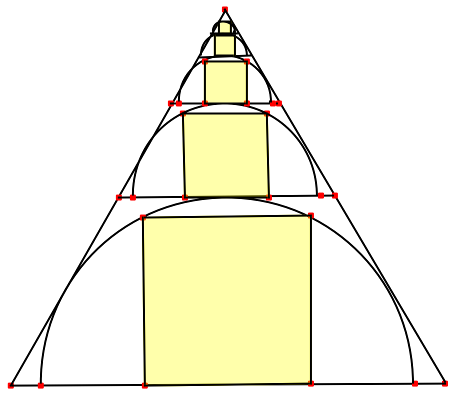
A/1=(sin72º/sin36º)²

B/1=((sin36º+sin72º)/sin36º)²

A=phi²

B=phi^4

3502.- Sobre un costat d'un triangle equilàter s'ha dibuixat un semicercle tangent als altres dos costats.
En el semicercle s'ha inscrit un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea dels infinits quadrats ombrejats i l'àrea del triangle equilàter.



Solució:

Siguen el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$

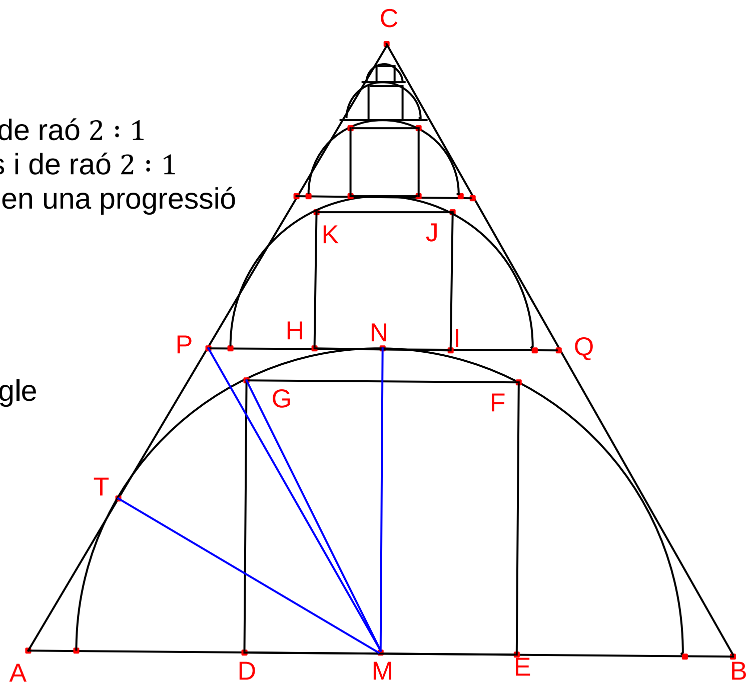
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Siguen els quadrats $DEFG, HIJK$.
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència de centre M i el costat $\overline{AC}$

$$\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AM}$$

$$\overline{PT} = \overline{PN} = \overline{AT}$$



Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PQC}$ són semblants i de raó $2:1$
Els quadrats $DEFG, HIJK$ són semblants i de raó $2:1$
Les àrees dels quadrats ombrejats formen una progressió geomètrica de raó $\frac{1}{4}$
Siga $x = \overline{DE}$ costat del quadrat $DEFG$.

$$\overline{MT} = \overline{MG} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores a triangle rectangle $\overset{\Delta}{MDG}$:

$$S_{DEFG} = x^2 = \frac{3}{20}c^2$$

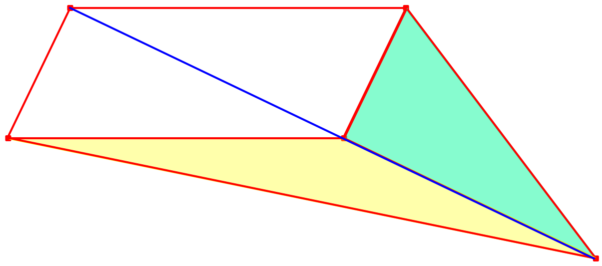
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = \frac{\frac{3}{20}c^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{5}c^2$$

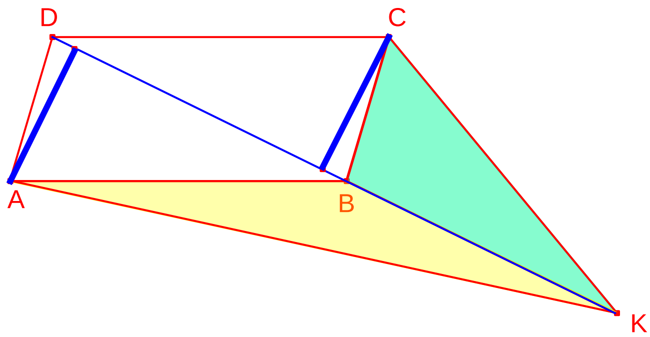
La proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{5}c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{15}$$

3503.- Sobre la recta diagonal d’un paral·lelogram es dibuixen dos triangles. Calculeu la proporció entre les àrees dels dos triangles.



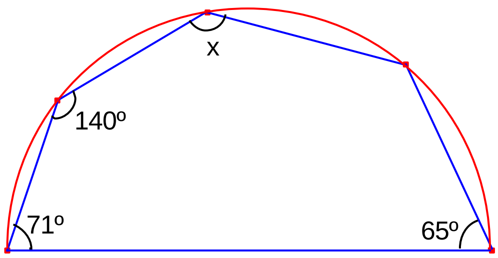
Solució:



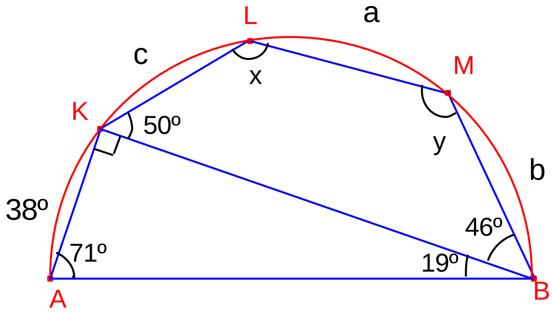
Siga el paral·lelogram $ABCD$.
Siga el punt K sobre la recta BD.

Els triangles $\overset{\Delta}{BKC}, \overset{\Delta}{BKA}$ tenen la mateixa altura sobre el costat comú $\overline{BK}$.
Aleshores, tenen la mateixa àrea.

3504.- En una semicircumferència s'ha inscrit un pentàgon.
Determineu la mesura de l'angle x



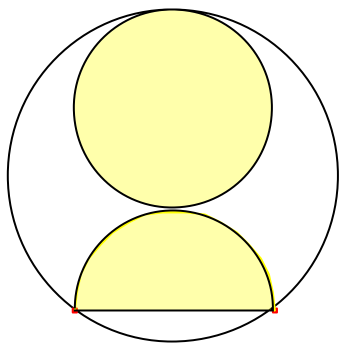
Solució:
$\angle AKB = 90°, \angle ABK = 19°$
$\angle LKB = 50°, \angle MBK = 46°$
Siga $\angle LMB = y$



Siguen $\widehat{AK} = 38°, \widehat{LM} = a, \widehat{BM} = b, \widehat{KL} = c$
$a + c = 92°$
$a + b = 100°$
Restant les dues expressions:
$b - c = 8°$

$$x = \frac{180° + 38° + b}{2}$$
$$y = \frac{180° + 38° + c}{2}$$
Sumant les expressions:
$$x + y = \frac{436° + b + c}{2}$$
La suma dels angles del quadrilàter $KBML$ és 360º
$x + y = 360° - (50° + 46°) = 264°$
$$\frac{436° + b + c}{2} = 264°$$
$b + c = 92°$
$$\begin{cases} b - c = 8° \\ b + c = 92° \end{cases}$$
Resolent el sistema:
$$\begin{cases} b = 50° \\ c = 42° \end{cases}$$
$$x = \frac{180° + 38° + b}{2} = 134°$$

3505.- El cercle i el semicercle ombrejat tenen el mateix radi.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



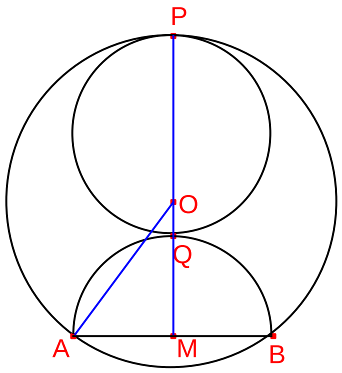
Solució:

Siga la circumferència exterior de centre O i radi $\overline{OP} = \overline{OA} = R$

Siga la semicircumferència de centre M i radi $\overline{MA} = \overline{MQ} = r$

Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{PQ} = 2r$

$\overline{OM} = 3r - R$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$R^2 = r^2 + (3r - R)^2$

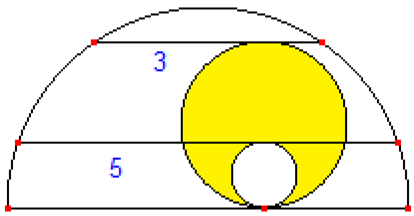
$10r^2 - 6rR = 0$

$R = \frac{5}{3}r$

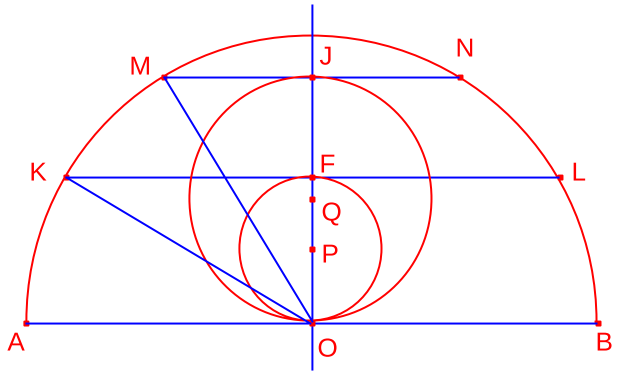
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{\frac{3}{2}\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{9}} = \frac{27}{50}$$

3506.- En una semicircumferència s'han dibuixat dues cordes paral·leles al diàmetre de mesures $3, 5$. Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = R$
Siguen les cordes $\overline{KL} = 5, \overline{MN} = 3$

Podem considerar les dues circumferències tangents amb els centres en la mediatriu del diàmetre $\overline{AB}$
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PO} = \overline{PF} = s$
Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QO} = \overline{QJ} = r$

$\overline{MJ} = \frac{3}{2}, \overline{KF} = \frac{5}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MJO}$:

$R^2 = \frac{9}{4} + 4r^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KFO}$:

$R^2 = \frac{25}{4} + 4s^2$

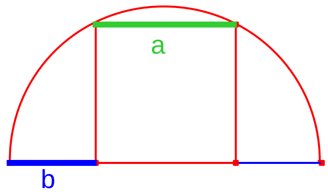
Restant ambdues expressions:

$r^2 - s^2 = 1$

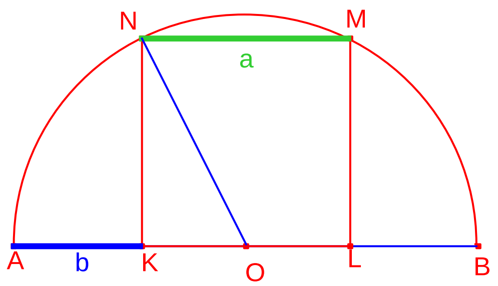
L'àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = \pi(r^2 - s^2) = \pi$

3507.- En una semicircumferència s’ha inscrit un quadrat.
Calculeu la proporció
$\frac{b}{a}$

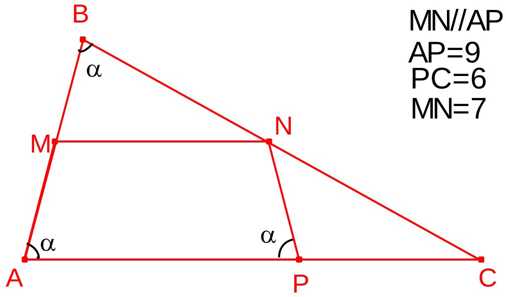


Solució:
Siga la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$
Siga el quadrat $KLMN$ de costat $\overline{KL} = a$
Siga $\overline{AK} = b = 1$
$\overline{ON} = \overline{OA} = 1 + \frac{a}{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:
$\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$a^2 - a - 1 = 0$



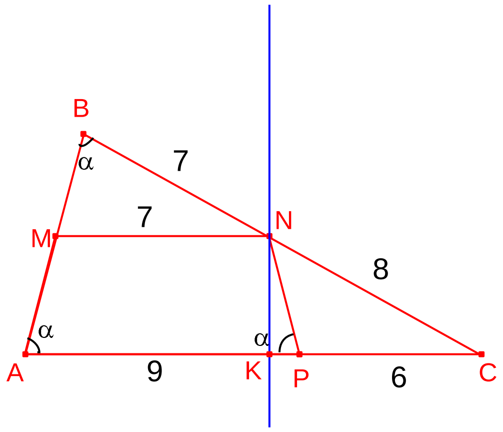
La proporció entre els segments és:
$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

3508.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el trapezi $APNM$, $\overline{AP}, \overline{MN}$ paral·lels.
Siga $\overline{AP} = 9, \overline{PC} = 6, \overline{MN} = 7$
Siga $\alpha = \angle BAC = \angle ABC = \angle APN$
Calculeu la mesura del segment $\overline{AM}$



MN//AP
AP=9
PC=6
MN=7

Solució:



ABC, MNB isòsceles

AM=PN

KP=(9-7)/2=1

teorema Pitàgores NKC:

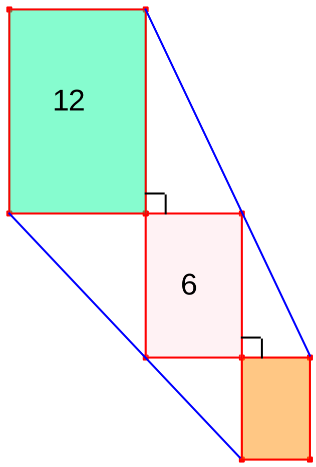
$KN^2=8^2-7^2=15$

teorema Pitàgores NKP

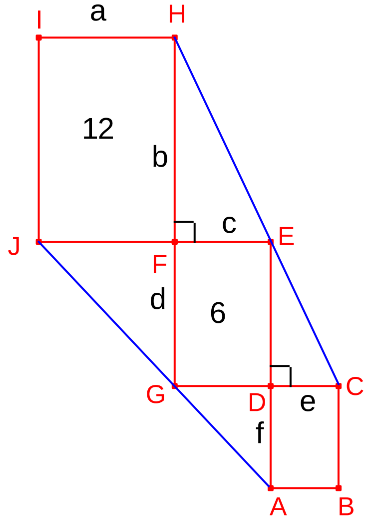
$NP^2=15+1^2=16$

AM=NP=4

3509.- La figura està formada per dos segments i tres rectangles, dos d'àrees 12 i 6.
Calculeu l'àrea del tercer rectangle.



Solució:
Siguen els rectangles $ABCD, DEFG, FHIJ$ de costats,
$\overline{IH} = a, \overline{FH} = b, \overline{FE} = c, \overline{FG} = d, \overline{CD} = e, \overline{DA} = f$



$ab = 12, cd = 6$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HFE}, \overset{\Delta}{EDC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$e = \frac{cd}{b}$$

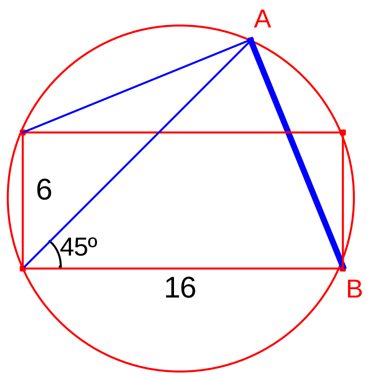
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JFG}, \overset{\Delta}{FDA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$f = \frac{cd}{a}$$

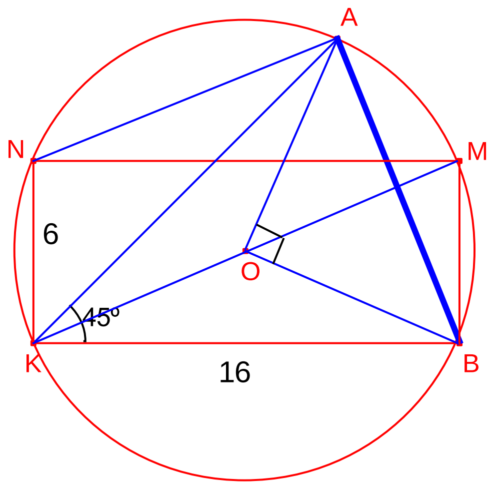
L'àrea del rectangles $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = ef = \frac{cd}{b} \cdot \frac{cd}{a} = \frac{6^2}{12} = 3$$

3510.- Una circumferència té inscrit un rectangle de costats 16, 6.
Calculeu la mesura de la corda $\overline{AB}$,



Solució:



KM=2R=2·sqrt(58)

AB=sqrt(2)·R=2·sqrt(29)